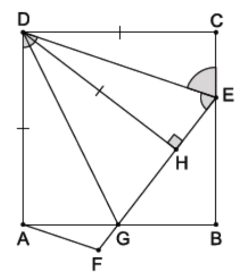
Concursul național de matematică

"LAURENȚIU PANAITOPOL"

Bucureşti, 24.11.2012

Soluții şi bareme - clasa a VIII -a

1.	**a)** Avem $2n^2+3n+1=(2n+1)(n+1)$	**1p**
	Deoarece, dacă $d\,|\,2n+1$ şi $d\,|\,n+1$, $d\in\mathbb{N}^*$, implică $d=1$, rezultă că numerele $2n+1$ şi $n+1$ sunt prime între ele, deci ambele sunt pătrate perfecte	**1p**
	b) Dacă $n=2k+1, k\in\mathbb{N}$, atunci $2n+1=4k+3$, deci nu este pătrat perfect. Deci *n* este par.	**1p**
	Atunci numărul $n+1$ este pătrat perfect impar, deci este de forma $8k+1,\ k\in\mathbb{N}$, adică $n=8k,\ k\in\mathbb{N}$ (1)	**1p**
	Dacă $n=3p+1$, $p\in\mathbb{N}$, atunci $n+1=3p+2$, deci nu este pătrat perfect Dacă $n=3p+2$, $p\in\mathbb{N}$, atunci $2n+1=6p+5$, care nu este pătrat perfect	**1p**
	Rezultă că $n=3p$, $p\in\mathbb{N}$. (2) Din (1) şi (2), rezultă concluzia. Exemplu: $n=24$.	**2p**
2.	Membrul stâng al inegalității se scrie $(x+y)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(2y+1)^2-\frac{5}{4}$.	**3p**
	Deoarece *x, y* şi *z* sunt numere întregi, rezultă că $(x+y)^2\geq 0$, $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geq\frac{1}{4}$ şi $(2y+1)^2\geq 1$.	**2p**
	Rezultă că $(x+y)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(2y+1)^2-\frac{5}{4}\geq 0$.	**1p**
	Egalitatea se atinge pentru $x=y=0$, sau $x=1, y=-1$, deci $k=0$.	**1p**
3.	**a)** Avem $r=\frac{A_{MNP}}{p_{MNP}}=\frac{PM\cdot PN}{PM+PN+MN}$. Obținem $r=\frac{PM\cdot PN\cdot(PM+PN-MN)}{(PM+PN)^2-MN^2}$, cum $MN^2=PM^2+PN^2$, rezultă $r=\frac{PM+PN-MN}{2}$.  **b)** Cum $\widehat{FED}\equiv\widehat{ADE}\equiv\widehat{CED}$, rezultă că semidreapta $(ED$ este bisectoarea unghiului $\widehat{CEF}$. Ducem $DH\perp EF$, $H\in EF$, deci $DH=DC=DA$. Obținem $\triangle DEC\equiv\triangle DEH$ şi $\triangle DGH\equiv\triangle DGA$. Rezultă că $EC=EH$ şi $GA=GH$. Avem $FG=EF-GE=AD-(AG+CE)=\frac{(BA-AG)+(BC-CE)-(GH+HE)}{2}=\frac{BG+BE-GE}{2}$ Conform **a)**, avem $r_{BEG}=FG$	**1p** **1p** **1p** **2p** **2p**
4.	Dacă $n\geq 5$ atunci ultima cifră a lui $n!$ este 0, deci ultima cifră a numărului $5^m+n!$ este 5, fals, căci 7^p are ca ultimă cifră 1, 3, 7 sau 9. Prin urmare $n\in\{1,2,3,4\}$.	**1p**
	- Pentru $n=1$ rezultă ecuația $5^m+1=7^p$, care nu are soluții, datorită parității diferite a celor doi membri.	**1p**
	- Pentru $n=2$ obținem ecuația $5^m+2=7^p$.	**2p**

	Dacă $m=1$ rezultă $p=1$, deci avem soluția $(m,n,p)=(1,2,1)$. Pentru $m\geq 2$ rezultă că $u\left(5^m+2\right)=7$ și prin urmare $p=4k+1$, cu $k\in\mathbb{N}$. Înlocuind în ecuație vom obține $5^m+2=7\cdot 2401^k$ sau $5\cdot\left(5^{m-1}-1\right)=7\cdot\left(2401^k-1\right)$. Cum $100\mid 2401^k-1$, din ultima relație rezultă că $5\mid 5^{m-1}-1$, fals, întrucât $m\geq 2$.	
	- Pentru $n=3$ rezultă $5^m+6=7^p$. Pentru $m=1$ nu avem soluții, iar pentru $m\geq 2$, ultima cifră a numărului 5^m+6 este 1, deci $p=4k$, cu $k\in\mathbb{N}^*$. Obținem $5^m+6=2401^k$, adică $5\left(5^{m-1}+1\right)=2401^k-1=\mathcal{M}\,2400$, fals câtă vreme membrul stâng nu este divizibil nici cu 4, nici cu 25.	**1p**
	- Pentru $n=4$ obținem ecuația $5^m+24=7^p$. Pentru $m=1$ nu avem soluții, iar pentru $m=2$ rezultă soluția $(m,n,p)=(2,4,2)$. Dacă $m\geq 3$ rezultă că $u\left(5^m+24\right)=9$ și prin urmare $p=4k+2$, cu $k\in\mathbb{N}^*$ (dacă $k=0$ rezultă $p=2$, care nu verifică ecuația). Înlocuind ecuația devine succesiv: $5^m+25=49^{2k+1}+1\Leftrightarrow 25\left(5^{m-2}+1\right)=50\left(1+49+49^2+\ldots+49^{2k}\right)$,adică $5^{m-2}=1+4900\cdot\left(1+49^2+49^4\ldots+49^{2k-2}\right)$, fals, deoarece membrul stâng are ultima cifră 5, pe când membrul drept se termină în 1. Așadar ecuația dată are soluțiile: $(m,n,p)\in\left\{(1,2,4),(2,4,2)\right\}$.	**2p**