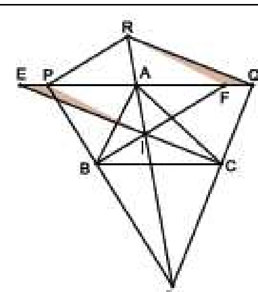
Concursul național de matematică

“LAURENȚIU PANAITOPOL”

Bucureşti, 24.11.2012

Soluții şi bareme - clasa a VII-a

1.	Fie a_1, a_2, a_3 cantitățile în kg, cumpărate de *A*. Avem $2\cdot a_1 = 3\cdot a_2 = 6\cdot a_3$	**1p**
	Deoarece $2\cdot a_1 + 3\cdot a_2 + 6\cdot a_3 = 18$, rezultă că $2\cdot a_1 = 3\cdot a_2 = 6\cdot a_3 = 18:3 = 6$ lei	**1p**
	Obținem $a_1 = 3$, $a_2 = 2, a_3 = 1$ şi $a_1 + a_2 + a_3 = 6$ kg. Prețul mediu pe kg pentru *A* este $p_1 = 18:6 = 3$ lei	**1p**
	Fie b_1, b_2, b_3 cantitățile în kg, cumpărate de *B*. Avem $\frac{b_1}{2} = \frac{b_2}{3} = \frac{b_3}{6}$	**1p**
	Relația este echivalentă cu $\frac{2\cdot b_1}{4} = \frac{3\cdot b_2}{9} = \frac{6\cdot b_3}{36} = \frac{2\cdot b_1 + 3\cdot b_2 + 6\cdot b_3}{49} = \frac{18}{49}$	**1p**
	Obținem $b_1 = \frac{36}{49}$, $a_2 = \frac{54}{49}, a_3 = \frac{128}{49}$ şi $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{198}{49}$. Prețul mediu pe kg pentru *A* este $p_2 = 18:\frac{198}{49} = \frac{49}{11}$ lei	**1p**
	Deci $p_1 < p_2$	**1p**
2.	**a)** Dacă $d \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ şi $d \mid n-73,\ d \mid 45$, rezultă că $d \mid n-28$, deci fracția $\frac{n-28}{45}$ este reductibilă.	**2p**
	Analog, fracțiile $\frac{n-28}{46}$, $\frac{n-28}{47}$, $\frac{n-28}{48}$, $\frac{n-28}{49}$ sunt reductibile	**2p**
	Rezultă că numărul $n-28$ trebuie să aibă cel puțin un divizor prim comun cu fiecare dintre numerele 45, 46, 47, 48 şi 49. Prin urmare $n-28$ trebuie să fie c.m.m.m.c al numerelor 2, 3, 7, 47	**1p**
	Obținem $n - 28 = 2\cdot 3\cdot 7\cdot 47 = 1974$, de unde $n = 2002$.	**2p**
3.	Fie $\{E\} = CI \cap PQ$. Cum $\widehat{ACE} \equiv \widehat{ECB} \equiv \widehat{AEC}$, rezultă că triunghiul *ACE* este isoscel cu baza $[EC]$. Deoarece triunghiul *ECQ* este dreptunghic, rezultă că $\widehat{ACQ} \equiv \widehat{AQC}$ (au acelaşi complement), deci $AQ = AC = AE$, adică *A* este mijlocul segmentului $[EQ]$ 	**2p** **1p**
	Analog, dacă $\{F\} = BI \cap PQ$, obținem că *A* este mijlocul segmentului $[FP]$	**1p**
	Deducem că triunghiurile *IEF* şi *RQP* sunt congruente (U.L.U.), deci $IF = RP$	**2p**
	Rezultă că triunghiurile *AFI* şi *APR* sunt congruente (L.U.L.), deci $AI = AR$	**1p**

4.	Fie D cel mai mare divizor propriu al numărului n şi d cel mai mic divizor propriu al lui n. Evident, d este număr prim şi $d \cdot D = n$. Conform ipotezei, $n - k \cdot D \mid n$. Deci $k \cdot D < n$, aprin urmare, $k < d$	**1p**
	Dacă $d = 2$, atunci $k = 1$ şi $D = \frac{n}{2}$. Conform ipotezei, $n - 2 \mid n$, deci $n - 2 \le D = \frac{n}{2}$, adică $n \le 4$. Prin urmare, $n = 4 = 2^2$	**2p**
	Pentru $d \ge 3$ şi $k \le d - 2$, obținem $n - k \cdot D \ge n - (d-2) \cdot D = n - d \cdot D + 2D = 2D > D$, contradicție.	**2p**
	Deci $k = d - 1$. Atunci $n - (d-1) \cdot d \mid n$ şi $D \ge n - (d-1) \cdot d \ge n - (d-1) \cdot D = D$. Rezultă că $n - (d-1) \cdot d = D$, adică $Dd - (d-1) \cdot d = D$, echivalent cu $(D-d)(d-1) = 0$, deci $D = d$ Prin urmare $n = d^2$.	**2p**