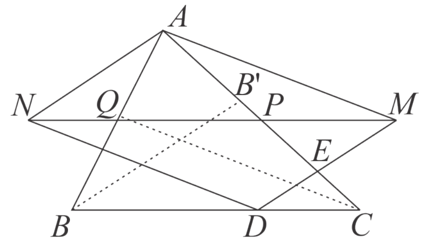
Soluţii şi barem – clasa a X-a



1. Fie ABC un triunghi şi D punctul de tangenţă cu latura BC a cercului exînscris corespunzător vârfului A; paralelele prin D la bisectoarele unghiurilor B şi C intersectează paralela la BC prin mijloacele laturilor AB şi AC în punctele M şi N. Arătaţi că:

a) $MN = \dfrac{AB + BC + CA}{2}$;

b) $AMDN$ este paralelogram.

Soluţie. Fie B' piciorul bisectoarei din B şi P, Q mijloacele laturilor $[AC]$, respectiv $[AB]$.

Se ştie că $CD = p - b, BD = p - c$, $CB' = ab/(a + c)$ **2p**

Din teorema lui Thales reiese $CE = CB' \cdot \frac{CD}{CB} = \frac{b(p-b)}{a+c}$, apoi $PE = \frac{b}{2} - CE = \frac{b^2}{2(a+c)}$, iar din asemănarea triunghiurilor CDE şi PME deducem $PM = CD \cdot \frac{PE}{CE} = \frac{b}{2} = \frac{1}{2}AC$; în mod analog rezultă $NQ = \frac{1}{2}AB$, de unde obţinem a) **3p**

Din $AP = PM$ reiese $m(\widehat{PAM}) = m(\widehat{PMA}) = \frac{1}{2}m(\widehat{APQ}) = m(\widehat{ACQ})$, deci $AM \parallel CQ \parallel ND$; analog $AN \parallel MD$ **2p**

2. Două funcţii f, g de gradul al doilea au proprietatea că pentru orice punct A de pe graficul lui f găsim un punct B pe graficul lui g astfel încât $AB < 1$.

Arătaţi că există numerele reale k, l astfel încât $f(x) - g(x) = kx + l$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Soluţie. Fie $f(x) = ax^2 + bx + c$ şi $g(x) = mx^2 + nx + p$.

În cazul $a > m$ arătăm că, pentru x_0 suficient de mare, toate punctele graficului lui g din intervalul $[x_0 - 1, x_0 + 1]$ se află sub dreapta $y = f(x_0) - 1$ (*), deci niciunul dintre punctele graficului lui g nu poate fi la o distanţă mai mică de 1 de punctul $(x_0, f(x_0))$ **3p**

Există α astfel încât funcţia g să fie monotonă pe intervalul (α, ∞); pentru $x > \alpha + 1$ avem $\max\limits_{t\in[x-1,x+1]} g(t) = \max\{g(x - 1), g(x + 1)\}$ **1p**

Deoarece $a > m$, mulţimea soluţiilor inecuaţiei $f(x) > g(x - 1) + 1$ conţine un interval (β, ∞), iar mulţimea soluţiilor inecuaţiei $f(x) > g(x + 1) + 1$ conţine un interval (γ, ∞) **1p**

Pentru $x_0 > \max\{\alpha - 1, \beta, \gamma\}$ se realizează situaţia (*), ceea ce contrazice ipoteza **1p**

În mod analog se arată că nu este posibil ca $a < m$ **1p**

3. Arătaţi că nu există niciun număr întreg a şi un număr real x astfel încât $|x| < \sqrt{3}$ iar numerele $\sqrt{3 - x^2}$ şi $\sqrt[3]{a - x^3}$ să fie simultan raţionale.

Soluţie. Dacă numerele sunt raţionale, atunci x^2 şi x^3 sunt raţionale, deci x este raţional .. **3p**

Deducem $x = \frac{m}{n}$ şi $3 - \frac{m^2}{n^2} = \frac{p^2}{q^2}$, de unde $3a^2 = b^2 + c^2$ (1), cu $a = nq, b = mq, c = np$ numere întregi nenule. Însă, ecuaţia (1) nu are decât soluţia $(0, 0, 0)$: dacă $b \neq 0, c \neq 0$, atunci $d = \text{c.m.m.d.c.}(b, c)$ îl divide pe a şi, simplificând cu d, obţinem o egalitate de forma $3A^2 = B^2 + C^2$, cu B, C prime între ele, în contradicţie cu faptul că dacă $B^2 + C^2$ este divizibil cu 3, atunci B şi C sunt divizibile cu 3 .... **4p**

4. a) Arătaţi că există $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) - f(y) \geq (x - y)^2$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}, x \geq y$.

b) Arătaţi că nu există $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) - f(y) \geq \sqrt{x - y}$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}, x \geq y$.

Soluţie. a) Se verifică uşor că $f(x) = 2x|x|$ convine **3p**

b) Dacă ar exista funcţia, atunci $f(1) - f(0) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(f\left(i/n\right) - f\left((i - 1)/n\right)\right) \geq n\sqrt{1/n} = \sqrt{n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ – contradicţie **4p**