Concursul de matematică ,,Laurenţiu Panaitopol”

Ediţia a IV-a, Bucureşti, 11 noiembrie 2011

SUBIECTELE

Clasa a VI-a

1. Ştiind că a, b, c sunt numere raţionale, $ab = 1{,}8$, $bc = 2{,}7$ şi $abc = 3{,}24$, calculaţi:
a) $b\,(a + c)$;
b) Suma numerelor a, b şi c.

2. Se consideră mulţimea $A = \{\overline{ab} \mid a$ şi b sunt cifre nenule$\}$.
a) Dacă $x \in A$ şi $y \in A$ astfel încât $x + y = 165$, arătaţi că $3x \geqslant 2y$.
b) Determinaţi numărul de perechi (x, y), $x \in A$ şi $y \in A$, pentru care $x + y = 165$.

3. La matematică, Andrei a susţinut mai multe teste. La fiecare test, el a obţinut punctaje exprimate prin numere naturale cel mult egale cu 100. La unul dintre teste, Andrei a obţinut cel mai mic punctaj, 68 puncte. Începând cu cel de-al treilea test, punctajele obţinute de Andrei au fost egale cu media aritmetică a punctajelor obţinute la testele precedente. În final, suma tuturor punctajelor obţinute de Andrei a fost de 360 puncte.
a) Determinaţi numărul de teste susţinute de Andrei.
b) Determinaţi suma punctajelor obţinute de Andrei la primele două teste.

4. Restul împărţirii unui număr natural n, $2 \leqslant n < 1000$, atât la împărţirea cu 10 cât şi la împărţirea cu 3, este egal cu 1. Arătaţi că, dacă $n = p^2$, $p \in \mathbb{N}$, atunci p este număr prim.

Clasa a VII-a

1. Numerele întregi m şi n verifică relaţia $3m + 4n = 100$. Determinaţi cea mai mică valoare posibilă a numărului $|m - n|$.

2. Se consideră mulţimea $A = \{\overline{abcd} \mid 6$ divide pe $\overline{abcd}\}$.
a) Determinaţi numărul de elemente ale mulţimii A.
b) Dacă n este un număr natural, notăm cu $s(n)$ suma cifrelor lui n. Determinaţi numărul elementelor $x \in A$ care au proprietatea că restul împărţirii numărului $s(x)$ la 10 este egal cu 6.

3. Se consideră un triunghi isoscel PQR cu proprietatea că există $S \in (RQ)$ astfel încât triunghiurile PSQ şi PSR sunt isoscele.
Determinaţi valorile posibile ale măsurilor unghiurilor triunghiului PQR.

4. Se consideră triunghiul ABC, $AB = AC$. Punctul D este piciorul înălţimii din A a triunghiului ABC, iar punctul E este piciorul perpendicularei din D pe dreapta AC. Dacă F este mijlocul segmentului $[DE]$, arătaţi că $AF \perp BE$.

Clasa a VIII-a

1. a) Arătaţi că, dacă $x \in [0,1]$, atunci $1 \leqslant \dfrac{1}{x^2-x+1} \leqslant \dfrac{4}{3}$.

b) Arătaţi că, dacă a, b sunt numere reale care îndeplinesc condiţiile

$i)$ $0 < a < b$ şi $ii)$ $a \leqslant \dfrac{1}{x^2-x+1} \leqslant b$ pentru orice $x \in [0, a]$,

atunci $b - a \geqslant \dfrac{1}{3}$.

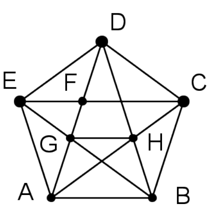
2. Arătaţi că $\left| \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}} - \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \right| < 2 - \sqrt{3}$.

3. Se consideră patrulaterul $ABCD$ înscris în cercul $C\,(O;R)$. Paralela prin punctul D la dreapta BC intersectează semidreapta $(CA$ în punctul P, dreapta AB în punctul Q, iar cercul $C\,(O;R)$ în punctele D şi R. Paralela prin punctul D la dreapta AB intersectează semidreapta $(CA$ în punctul S, dreapta BC în punctul T, iar cercul $C\,(O;R)$ în punctele D şi U. Demonstraţi că, dacă $PQ = QR$, atunci $ST = TU$.

4. Se consideră numărul natural nenul n. Determinaţi numerele naturale a_1, a_2,. . ., a_n, cu $a_1 \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant a_n$, care satisfac simultan relaţiile:
$i)$ $a_1 + a_2 + ... + a_n \geqslant n^2$;
$ii)$ $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \leqslant n^3 + 1$.

Clasa a IX-a

1. Figura alăturată reprezintă un pentagon regulat. Arătaţi că $[GH] \equiv [DF]$.



2. Arătaţi că: $x^4 + y^4 + axy + 2 \geqslant 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $|a| \leqslant 4$.

L. Panaitopol

3. Găsiţi toate numerele naturale x, y pentru care $x^2 + y + 3$ şi $y^2 + x + 3$ sunt pătrate perfecte.

4. Arătaţi că există o infinitate de pătrate perfecte care au toate cifrele nenule şi suma cifrelor pătrat perfect.

Clasa a X-a

1. Arătaţi că există o infinitate de cvadrupluri (a, b, c, d) de numere naturale distincte astfel încât $a + b = c + d$ şi $\sqrt{a} + \sqrt[3]{b} = \sqrt{c} + \sqrt[3]{d}$.

2. Arătaţi că, notând $(a,b) =$ c.m.m.d.c. $\{a,b\}$ şi $[a,b] =$c.m.m.m.c. $\{a,b\}$:

a) pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există numerele naturale $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ astfel încât, pentru orice $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ are loc relaţia (R): $[a_i, a_j] \leqslant (a_i, a_j)^2$;

b) nu există un şir strict crescător $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de numere naturale ai cărui termeni să verifice (R).

L. Panaitopol

3. În triunghiul ABC, bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ taie (BC) în D, cercul circumscris triunghiului ABD taie AC a doua oară în E şi cercul circumscris triunghiului ACD taie AB a doua oară în F. Arătaţi că $[BF] \equiv [CE]$.

4. Câte permutări $(a_1, a_2, \ldots, a_{101})$ ale numerelor $(2, 3, \ldots, 102)$ au proprietatea: pentru orice $k \in \overline{1, 101}$, a_k este divizibil cu k ?

Clasele XI – XII

1. Arătaţi că graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + \{x\}$ este tăiat de orice paralelă la Ox în exact două puncte.

2. Funcţia $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ are proprietatea: $(x+y)f(x) \leqslant x^2 + f(xy) + 2011$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că $f(x) \leqslant x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{N}^*$ şi că funcţia $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N},\ g(x) = x - f(x)$ este mărginită.

3. Determinaţi numerele reale $x \geqslant 1, y \geqslant 1$ pentru care $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}$ şi $\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}$ sunt numere întregi neconsecutive.

L. Panaitopol

4. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$. Vom numi o secvenţă $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de numere reale *nerepetitivă* dacă numerele $a_i + a_{i+1}, i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ sunt distincte două câte două (de exemplu, secvenţa $(1, 2, 3, 3, 1, 1)$ este nerepetitivă, are lungime 6 şi în ea apar trei numere distincte). Determinaţi numărul minim de numere distincte care apar într-o secvenţă nerepetitivă de lungime $n = 53$.