

Concursul de matematică „Laurențiu Panaitopol”
Colegiul Național „Spiru Haret”, București, 20.11.2010

Clasele IX - X

1. Fie triunghiul ABC , cu $AB < AC$ și D piciorul bisectoarei din A . Pe semidreptele $(CA$ și $(BA$ luăm punctele P , respectiv Q astfel încât $CP = AB$ și $BQ = AC$. Notăm M intersecția dreptei PQ cu BC .

- Arătați că dreptele PQ și AD sunt paralele.
- Arătați că $BD = MC$.
- Arătați că AD este medie geometrică între MP și MQ .

2. Considerăm șirul numerelor naturale care nu sunt pătrate perfecte, așezate în ordine crescătoare: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, ... Arătați că al n -lea termen din acest șir este $n + [\frac{1}{2} + \sqrt{n}]$, oricare ar fi $n \geq 1$.

3. Pe o tablă de șah sunt 33 de jetoane, așezate în pătrățele distincte. Arătați că există cel puțin 5 jetoane care sunt situate, două câte două, pe linii și coloane diferite.

4. a) Arătați că numărul $2010!$ este divizibil cu 3^{1000} (unde s-a notat $2010! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2010$).

- Arătați că $(2010!)^3 + 3^{2010}$ nu este pătrat perfect.