S.S.M.R., filiala Bucureşti

## Concursul de matematică ,,Laurenţiu Panaitopol

Colegiul Naţional ,,Spiru Haret", Bucureşti, 20.11.2010

### Barem de corectare, clasele XI - XII

**1.** Câte numere dintre $1, 2, \ldots, 2010$ se pot exprima în forma

$$[2x] + [4x] + [6x] + [8x], x \in \mathbb{R} \ ?$$

*Soluţie.* Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [2x] + [4x] + [6x] + [8x]$. Ea este crescătoare, are valori întregi şi are proprietatea $f(x + 1/2) = f(x) + 10$ ................ **3p**

Pe intervalul $[0, 1/2)$, valorile funcţiei au ,,salturi" în punctele 1/8, 1/6, 1/4, 1/3, 3/8 şi doar în ele. Astfel, pe intervalul $[0, 1/2)$ funcţia are 6 valori, cuprinse între 0 şi 6 (în fapt, valorile atinse sunt $0, 1, 2, 4, 5, 6$) ... **2p**

Deducem că, dintre orice 10 numere naturale consecutive, exact 6 fac parte din imaginea funcţiei. De aici reiese că numărul cerut este $201 \cdot 6 = 1206$ ............... **2p**

**2.** Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ care sunt mărginite şi au proprietatea: pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$,

$$f(xy) + f(x + y) = f(x)f(y) + 1.$$

*Soluţie.* Din $2f(0) = f^2(0) + 1$ rezultă $f(0) = 1$ .............................. **1p**

Apoi, $f(x+1) = f(x)(f(1)-1)+1$, pentru orice $x$ întreg .......................... **1p**

Dacă $f(1) \geq 2$ sau $f(1) \leq -1$, atunci $f$ este nemărginită, deci $f(1) \in \{0, 1\}$ ..... **2p**

În cazul $f(1) = 1$ rezultă $f \equiv 1$ ...... **1p**

În cazul $f(1) = 0$ obţinem $f(x) = 0$ pentru $x$ impar şi $f(x) = 1$ pentru $x$ par ... **1p**

Ambele funcţii convin .............. **1p**

**3.** a) Rezolvaţi ecuaţia

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} = 3 - 4\sin^2 x.$$

b) Arătaţi că

$$\prod_{k=0}^{1024} \left(4\sin^2 \frac{k\pi}{2048} - 3\right) = 3.$$

*Soluţie.* a) Egalitatea este valabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$, cu condiţia $\sin x \neq 0$. Mulţimea soluţiilor este $\mathbb{R} \setminus \{m\pi \mid m \in \mathbb{Z}\}$ .. **3p**

b) Fie $f(k) = \sin \frac{k\pi}{2048}$. Produsul cerut este

$$-3\prod_{k=1}^{1023} \left(4\sin^2 \frac{k\pi}{2048} - 3\right) = -3\prod_{k=1}^{1023} \frac{f(3k)}{f(k)}.$$

........................................ **1p**

Din $\sin x = \sin(\pi - x) = -\sin(x - \pi)$ reiese $f(3k) = f(2048-3k) = -f(3k-2048)$. Astfel, numărătorul ultimei fracţii este

$$\left(\prod_{k=1}^{341} f(3k)\right)\left(\prod_{k=342}^{682} f(3k)\right)\left(\prod_{k=683}^{1023} f(3k)\right) =$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{341} f(3k)\right)\left(\prod_{k=1}^{341} f(3k-1)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\prod_{k=1}^{341} (-f(3k-2))\right) = -\prod_{k=1}^{1023} f(k) \ldots\ldots \mathbf{3p}$$

**4.** Pentru fiecare număr natural $n > 1$ notăm cu $d_n$ numărul divizorilor săi pozitivi şi cu $s_n$ suma acestora. Arătaţi că

$$d_n\sqrt{n} < s_n < n\sqrt{2d_n}.$$

*Soluţie.* Divizorii se împart în perechi $(d, \frac{n}{d}), d \leq \sqrt{n}$, şi $\sum_{d|n, d\leq\sqrt{n}} \left(d + \frac{n}{d}\right) \geq 2\frac{d_n}{2}\sqrt{n}$, inegalitatea fiind strictă ................ **3p**

Pentru a doua inegalitate, observăm că $s_n < \sqrt{d_n \sum_{d|n} d^2} = \sqrt{d_n \sum_{d|n} \frac{n^2}{d^2}}$ iar $\sum_{d|n} \frac{1}{d^2} \leq$

$$\leq \sum_{1\leq d\leq n} \frac{1}{d^2} \leq 1 + \sum_{2\leq d\leq n} \frac{1}{d(d-1)} < 2 \ \ldots\ \mathbf{4p}$$