Concursul IMAR
(din cadrul concursului "Laurenţiu Panaitopol")

Ediţia 2009 (a şaptea).
Data: Sâmbătă 7 Noiembrie, orele 10:00.
Locul: Colegiul Naţional "Spiru Haret", Bucureşti.
Timp de lucru: 4 ore (plus $\frac{1}{2}$ oră pentru întrebări).

Problema 1. Fie date a şi b numere întregi strict pozitive distincte. Demonstraţi că sistemul de ecuaţii

$$\begin{aligned} xy + zw &= a \\ xz + yw &= b \end{aligned}$$

are un număr finit de soluţii numere întregi x, y, z, w.

Problema 2. Un cub are 7 vârfuri marcate cu valoarea 0 şi al optulea cu valoarea 1. O *mutare* este selectarea unei muchii şi mărirea numerelor din vârfuri cu o valoare întreagă $k > 0$. Demonstraţi că după orice număr finit de mutări, c.m.m.d.c. al celor 8 numere din vârfuri este egal cu 1.

Problema 3. Fie patrulaterul convex $ABCD$ având

$$AB = CB \quad \text{şi} \quad \angle ABC + 2\angle CDA = \pi,$$

şi fie E mijlocul diagonalei AC. Demonstraţi că $\angle CDE = \angle BDA$.

Problema 4. Fiind date n numere întregi strict pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (nu neapărat distincte), şi o secvenţă $(x_1, x_2, \ldots, x_{2^n})$ de 2^n numere, fiecare dintre acestea egal cu unul dintre numerele a_i, demonstraţi că există (măcar) o subsecvenţă formată din termeni consecutivi $(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_\ell)$, astfel încât produsul $\displaystyle\prod_{i=k}^{\ell} x_i$ al acestor termeni este pătrat perfect.

Arătaţi şi că numărul 2^n nu poate fi înlocuit cu nicio valoare mai mică.

Problema 5. Determinaţi cel mai mic număr real c, astfel încât

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k}} < c \sum_{k=1}^{n} a_k$$

oricare ar fi numărul întreg $n \geq 1$ şi oricare ar fi numerele reale strict pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Concizia şi claritatea redactării vor fi luate în consideraţie. Ciornele nu se remit. Fiecare problemă valorează 10 puncte.

Mult SUCCES tuturor participanţilor!