Concursul de matematică „L. Panaitopol" – Soluţii IX – X

1. a) Putem, de exemplu, să luăm triunghiurile PQR şi PQS cu $\angle PQR = \angle PQS = 90°$ şi $\angle PRQ = x°$, $\angle PSQ = y°$, iar R şi S de părţi opuse ale lui PQ; din $x < y$ reiese $PS < PR$, de unde $\sin x° = \frac{PQ}{PR} < \frac{PQ}{PS} = \sin y°$. **(3p)**

b) Din ipoteză şi $S = \frac{ab\sin C}{2}$ reiese că $\sin A \leq \sin A'$, $\sin B \leq \sin B'$, $\sin C \leq \sin C'$, deci, conform a), $A \leq A'$, $B \leq B'$, $C \leq C'$. **(2p)**

Deoarece $A + B + C = A' + B' + C'$, deducem $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$, adică triunghiurile sunt asemenea. Pentru raportul k de asemănare avem $k \leq 1$ şi $k^2 \geq 1$, deci $k = 1$. **(2p)**

2. Fie $p < q$ numerele prime. Observăm că $p + q = 2s, s \geq 4$. **(2p)**

Dacă s are cel puţin doi factori primi, atunci concluzia se verifică. **(2p)**

În caz contrar, $s = \frac{p+q}{2}$ este un număr prim situat între p şi q – contradicţie cu faptul că p, q sunt consecutive. **(3p)**

3. $\left|\dfrac{r-x}{x}\right| = \begin{cases} 1 - \dfrac{r}{x}, & x \geq r \\ \dfrac{r}{x} - 1, & x \leq r \end{cases}$ **(2p)**

Rezultă că $M(r) = \max\{\frac{r}{a} - 1, 1 - \frac{r}{b}\}$. **(2p)**

Deoarece $\frac{r}{a} - 1 \geq 1 - \frac{r}{b} \Leftrightarrow r \geq \frac{2ab}{a+b}$, deducem că $M(r) = \frac{r}{a} - 1 \geq \frac{2b}{a+b} - 1 = \frac{b-a}{a+b}$ dacă $r \geq \frac{2ab}{a+b}$ şi $M(r) = 1 - \frac{r}{b} \geq 1 - \frac{2a}{a+b} = \frac{b-a}{a+b}$ dacă $r \leq \frac{2ab}{a+b}$. **(2p)**

Astfel, $\min M(r)$ este $\frac{b-a}{a+b}$ şi se atinge pentru $r = \frac{2ab}{a+b}$. **(1p)**

4. Fie $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_{100}$ şi $f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_{100}$ vârstele băieţilor $B_1, B_2, \ldots, B_{100}$, respectiv ale fetelor $F_1, F_2, \ldots, F_{100}$ (măsurate în zile). Avem de arătat că $|b_i - f_i| \leq 7$, pentru orice i.

Fie i arbitrar; analizăm doar cazul $b_i \geq f_i$, celălalt caz fiind analog. **(1p)**

În cazul în care, în situaţia iniţială, băiatul B_i a dansat cu fata F_j, $j \leq i$, atunci $b_i - f_i \leq b_i - f_j \leq 7$. **(3p)**

În caz contrar, B_i a dansat iniţial cu $F_k, k > i$, iar $b_i - f_i \leq b_k - f_k \leq 7$. **(3p)**