

Concursul național de matematică

“LAURENȚIU PANAITOPOL”

București, 07.11.2009

Bareme și soluții. Clasa a VIII-a

1. a) Notăm, de exemplu, $a = 998 \frac{99}{112}$ și $b = 997 \frac{99}{112}$
Avem : $ab - (a+1)(b-1) = ab - ab + a - b + 1 = 2$. **3 p**
- b) Relația din ipoteză este echivalentă cu $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$. **2 p**
Obținem $\frac{a}{a+b} = \frac{2}{7}$. **2 p**
2. Fie $\{O\} = AC \cap BD$.
a) În triunghiul ACD segmentul $[OQ]$ este linie mijlocie.
Rezultă că $OQ \parallel DC$.
Cum $OQ \subset (QBD)$, rezultă că $DC \parallel (QBD)$.
b) Deoarece $QO = \frac{1}{2} \cdot DC$, rezultă că $QO = \frac{1}{2} \cdot DB$.
În triunghiul DBQ , segmentul $[QO]$ este mediană.
Prin urmare, triunghiul DBQ este dreptunghic în Q .
3. a) $R = \frac{a+b}{2}$ și $x = \frac{a+b}{2} - a = \frac{a-b}{2}$. **2 p**
Se verifică egalitățile din cerințe. **2 p**
b) Relația se mai scrie $\sqrt{R^2 + x^2} + \sqrt{R^2 - x^2} \leq 2R$. **1 p**
Prin ridicare la pătrat se obține inegalitatea echivalentă $\sqrt{R^4 - x^4} \leq R^2$ care este evidentă. **2 p**
4. a) Scăzând din ambii membri ai relației din enunț $3ab + 2abc$, aceasta devine $(a-b)^2 = ab(c-3)(c+1)$. **2 p**
Rezultă că $c \geq 3$. **1 p**
b) Adunând în ambii membri ai relației din enunț $ab - 2abc$, relația devine echivalentă cu $(a+b)^2 = ab(c-1)^2$. **1 p**
Obținem $ab = \frac{(a+b)^2}{(c-1)^2}$, de unde $(c-3)(c+1) = (a-b)^2 \cdot \frac{(c-1)^2}{(a+b)^2}$. **2 p**
Deci $\frac{c-3}{c+1} = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} \cdot \frac{(c-1)^2}{(c+1)^2}$. Rezultă concluzia. **1 p**