Concursul de matematică ,,L. Panaitopol" – Soluţii XI – XII

1. Dacă un termen al şirului este 2, atunci, începând cu acel termen, şirul este $2, 3, 2, 3, 2, 3, \ldots$, deci este periodic. **(3p)**

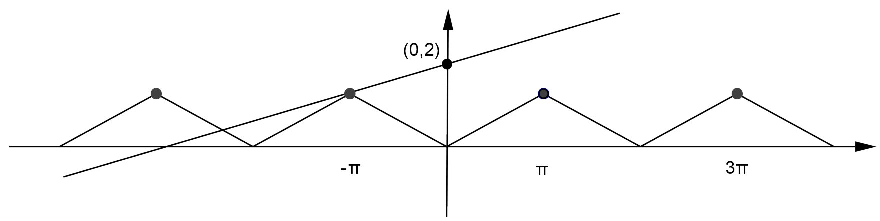
În caz contrar, pentru $n \geq 1$, $a_{n+1} \leq \frac{a_n+1}{2} < a_n$ (deoarece a_n este impar şi mai mare ca 1), adică am avea un şir strict descrescător de numere naturale – fals. **(4p)**

2. $y = 2 + mx$ este ecuaţia unei drepte care trece prin punctul $(0, 2)$. **(1p)**

$\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{2\sin^2 x/2}{2\cos^2 x/2} = \mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}$ pentru $x \neq \pi + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$, deci $\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = |\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}|$ şi $\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = |\frac{x}{2} + k\pi|, k \in \mathbb{Z}$. **(3p)**

Pentru $x \in [2n\pi, \pi + 2n\pi), n \in \mathbb{N}^*$ avem $\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{x}{2} - n\pi$, iar pentru $x \in (\pi + 2n\pi, 2\pi + 2n\pi]$, $n \in \mathbb{N}^*$ avem $\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = -\frac{x}{2} + (n+1)\pi$. **(1p)**

Graficul funcţiei definite de expresia $\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$, considerată pe domeniul maximal, este cel din figură (funcţia este pară, deci graficul este simetric faţă de Ox); punctele marcate nu fac parte din grafic. **(1p)**



Dreapta $y = 2 + mx$ taie graficul precedent în toate situaţiile, cu excepţia cazului când este orizontală; dacă trece prin unul dintre punctele marcate atunci ea taie porţiunea de grafic care ,,începe" (pentru $m < 0$) sau ,,se termină" (pentru $m > 0$) cu punctul marcat. **(1p)**

3. Avem relaţia $z_i^3 = (z_1 + z_2 + z_3)z_i^2 - (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)z_i + z_1z_2z_3$. **(2p)**

Dacă $m > 1$, reiese $z_1^{m+2} + z_2^{m+2} + z_3^{m+2} = (z_1 + z_2 + z_3)(z_1^{m+1} + z_2^{m+1} + z_3^{m+1}) - (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)(z_1^m + z_2^m + z_3^m) + z_1z_2z_3(z_1^{m-1} + z_2^{m-1} + z_3^{m-1})$. **(2p)**

În cazul $z_1z_2z_3 \neq 0$ rezultă $z_1^{m-1} + z_2^{m-1} + z_3^{m-1} = 0$; obţinem, folosind inducţie, $z_1^p + z_2^p + z_3^p = 0$ pentru orice $p \leq m + 2$. **(1p)**

În sfârşit, din $z_1^3+z_2^3+z_3^3 = (z_1+z_2+z_3)(z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_1z_2-z_1z_3-z_2z_3)+3z_1z_2z_3$. rezultă $z_1z_2z_3 = 0$, ceea ce arată că presupunerea făcută mai sus este falsă. Astfel, cel puţin unul dintre numere este nul; reluând raţionamentul pentru cele două numere rămase şi folosind $z_i^2 = (z_1 + z_2)z_i - z_1z_2$ deducem, ca mai sus, că unul dintre ele este nul, de unde concluzia **(2p)**

4. Dacă dreapta are ecuaţia $mx = ny, m, n \in \mathbb{Z}, m^2 + n^2 \neq 0$, atunci ea taie cercurile care au centrele în punctele $(nk, mk), k \in \mathbb{Z}$. **(2p)**

În caz contrar, ea are o ecuaţie de forma $y = mx, m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, iar distanţa de la ea la punctul (p, q) este $\frac{|mp-q|}{\sqrt{m^2+1}} < |mp - q|$. **(1p)**

Considerăm numerele $m-[m], 2m-[2m], \ldots, 100m-[100m]$. Aceste 100 de numere sunt distincte (altfel am avea $m \in \mathbb{Q}$) şi sunt situate în intervalul (0,1), deci există două – fie acestea $am-[am], bm-[bm], a > b$ – la distanţă mai mică decât 0,01. Luând $p_1 = a-b, q_1 = [am]-[bm]$ găsim un punct (p_1, q_1), cu $p_1 > 0$, situat la distanţă $<$ 0,01 de dreaptă. Luând apoi numerele $2p_1m-[2p_1m], 4p_1m-[4p_1m], \ldots, 200p_1m-[200p_1m]$ şi raţionând ca mai sus, găsim un punct (p_2, q_2), cu $p_2 > p_1$, situat la distanţă $<$ 0,01 de dreaptă. Cele de mai sus se pot repeta şi construim astfel inductiv un şir de puncte (p_n, q_n), cu $0 < p_1 < p_2 < \ldots$, situate la distanţă $<$ 0,01 de dreaptă. **(4p)**