

Societatea de Științe Matematice din România
Colegiul Național „Spiru Haret”, București
Centrul de Excelență „Sfântul Sava”, București
Institutul de Matematică al Academiei Române

Concursul de matematică „Spiru Haret”

București, 22 noiembrie 2008

SUBIECTELE

CLASELE XI – XII

Subiectul 1. Demonstrați că nu există niciun șir de numere naturale nenule $(x_n)_{n \geq 1}$ care îndeplinește condiția:

$$x_{n+1} = x_n + x_{x_{n-1}}, \quad \forall n \geq 2.$$

Subiectul 2. Se consideră o mulțime finită de discuri situate într-un plan P și reuniunea lor, D . Se știe că, oricum am fixa în planul P un sistem de coordonate, D conține cel puțin 2007 puncte cu ambele coordonate întregi. Arătați că putem fixa în planul P un sistem de coordonate astfel încât D să conțină 2008 puncte cu ambele coordonate întregi.

Subiectul 3. Un șir $(p_n)_{n \geq 1}$ de numere prime îndeplinește condiția: pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+2} | (p_n + p_{n+1} + 2008)$.

- a) Demonstrați că șirul este mărginit.
- b) Dați exemplul de astfel de șir, care este periodic.

Subiectul 4. Se consideră o mulțime cu $n \geq 5$ elemente și $n+1$ submulțimi distincte ale sale, cu câte 3 elemente fiecare. Demonstrați că printre aceste submulțimi există două care au exact un element comun.

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.