Concursul de matematică ,,Spiru Haret" – Soluţii IX – X

1. Dacă M are mai mult de două elemente supraunitare, fie $a > b$ cele mai mari dintre acestea. Folosind ipoteza pentru $\{a, b, c\}$, cu $c > 1$ şi observaţia $ab, ac > a \Rightarrow ab, ac \notin M$, rezultă $bc \in M$; cum $bc > b$ deducem $bc = a$. Astfel, M are cel mult trei elemente supraunitare. **(4p)**

Analog se demonstrează că M are cel mult trei elemente subunitare, deci, în total, M are cel mult 7 elemente. **(1p)**

Un exemplu cu 7 elemente este $\{\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\, 1, 2, 4, 8\}$.**(2p)**

2. Pentru a îndeplini egalitatea

$$\frac{(x+k)(y+k)}{x+y} = a$$

putem lua $x = 2a - k, y = 2a - 3k$ dacă $a \neq k$ **(4p)** şi $x = k^2, y = -1$ dacă $a = k$. **(3p)**

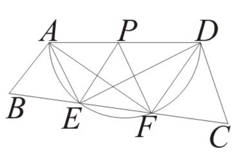
Observaţie. Reprezentarea indicată nu există în cazul $a = k = \pm 1$.

3. Raţionăm inductiv. În cazul $n = 2$, concluzia se verifică direct, analizând cele 6 posibilităţi de alegere a mulţimilor A_1, A_2. **(2p)**

Presupunem acum că proprietatea este adevărată pentru $n \geqslant 2$ şi considerăm o familie de submulţimi distincte $A_1, \ldots, A_{n+1}$ ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, n+1\}$. Fie $B_i = A_i \setminus \{n+1\},\ i = 1, \ldots, n+1$. Există două cazuri.

i) Mulţimile $B_1, \ldots, B_{n+1}$ sunt distincte; în acest caz proprietatea este verificată luând $x = n + 1$. **(1p)**

ii) Printre mulţimile $B_1, \ldots, B_{n+1}$ există mulţimile distincte $C_1, \ldots, C_k,\ k \leqslant n$ şi ,,copiile" acestora $C_{k+1}, \ldots, C_{n+1}$. Deoarece egalitatea $B_i = B_j$ este posibilă pentru $i \neq j$ doar dacă mulţimile A_i, A_j conţin aceleaşi elemente dintre $1, 2, \ldots, n$ iar exact una dintre ele îl conţine pe $n + 1$, rezultă că fiecare dintre mulţimile $C_1, \ldots, C_k$ are cel mult o copie, cele care au copie corespund unor mulţimi $A_{i_1}, \ldots, A_{i_p} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, iar copiile sunt de forma $C_i \cup \{n+1\}$. Folosind acum ipoteza de inducţie, există un element $x \in \{1, \ldots, n\}$ astfel încât mulţimile $C_1 \setminus \{x\}, \ldots, C_k \setminus \{x\}$ să fie distincte. Deducem că mulţimile $C_1 \setminus \{x\}, \ldots, C_k \setminus \{x\}$, $C_1 \cup \{n+1\} \setminus \{x\}, \ldots, C_k \cup \{n+1\} \setminus \{x\}$ sunt şi ele distincte, iar printre ele se află toate mulţimile de forma $A_i \setminus \{x\}, 1 \leqslant i \leqslant n+1$. **(4p)**



4. Dacă $AE \perp ED$, fie $P \in (AD)$ astfel încât $\angle AEP = \angle AEB$ (P există, deoarece $m(\angle AED) = 90^\circ > m(\angle AEB)$). **(2p)** Din $\triangle AEB \equiv \triangle AEP$ rezultă $\angle APE \equiv \angle ABE \equiv \angle ACD$. Astfel, patrulaterul $EPDC$ este inscriptibil, iar $m(\angle CED) = 90^\circ - m(AEB) = 90^\circ - m(AEP) = m(\angle DEP)$, de unde reiese $CD = DP$. **(2p)**

Obţinem astfel $\triangle CDF \equiv \triangle PDF$, $\angle DPF \equiv \angle DCF \equiv \angle ABE$, patrulaterul $ABFP$ este inscriptibil, $\angle AFP \equiv \angle AFB$ şi, în final,

$m(\angle AFD) = m(\angle AFP) + m(\angle DFP) = \frac{1}{2}(m(\angle BFP) + m(\angle CFP)) = 90^\circ$. **(3p)**