Concursul de matematică ,,Spiru Haret" – Soluţii XI – XII

1. Din ipoteză reiese $x_{n+1} > x_n, \forall n \geqslant 2$, de unde, inductiv, $x_n \geqslant x_2 + n - 2 \geqslant n - 1$ pentru $n \geqslant 2$. **(3p)**

Rezultă $x_{n+1} \geqslant x_n + x_{n-2} \geqslant x_n + 2$ pentru $n \geqslant 5$, ceea ce implică $x_n \geqslant x_5 + 2(n-5) \geqslant 2n - 6$ pentru $n \geqslant 5$.**(2p)**

Aceasta duce la $x_9 \geqslant 12$, ceea ce contrazice relaţia $x_{11} = x_{10} + x_{x_9}$. **(2p)**

2. Aşezăm axele astfel încât cel puţin un punct laticial $A(a, b)$ să se afle pe frontieră. **(3p)**

Considerăm un număr real $d > 0$, astfel încât orice distanţă de la un punct laticial exterior lui D la frontiera lui D să fie mai mare decât d. Deplasăm acum axele cu distanţa $d/2$, astfel încât punctul (a, b) să fie în exteriorul lui D. **(2p)**

Dacă D nu conţinea 2008 puncte laticiale în aşezarea iniţială, atunci, în noua aşezare, D are cel mult 2006 puncte laticiale – contradicţie. **(2p)**

3. a) Arătăm inductiv că, dacă $A \geqslant \max\{2011, a_1, a_2\}$, atunci avem majorantul $A! + 1$. Aceasta rezultă din faptul că în mulţimea $\{A!+2, A!+3, \ldots, A!+2011\}$ nu există nici un număr prim şi:

• dacă p_n şi p_{n+1} sunt impare atunci $p_{n+2} \leqslant \frac{1}{2}(p_{n+1} + p_n + 2008) \leqslant A! + 1005$;

• dacă cel puţin unul dintre numerele p_n şi p_{n+1} este 2 atunci $p_{n+2} \leqslant A! + 2011$. **(5p)**

b) Un exemplu este $2, 3, 3, 2, 3, 3, \ldots$ **(2p)**

4. Demonstrăm prin inducţie. În cazul $n = 5$ avem 6 submulţimi dintre $(\{1,2,3\}, \{1,4,5\})$, $(\{1,2,4\}, \{2,3,5\})$, $(\{1,3,5\}, \{2,3,4\})$, $(\{1,3,4\}, \{2,4,5\})$, $(\{1,2,5\}, \{3,4,5\})$, deci trebuie să luăm două din aceeaşi pereche. **(2p)**

Să presupunem acum că proprietatea este adevărată pentru orice $k < n$, unde $n \geqslant 6$ şi să presupunem că este falsă pentru o mulţime M cu n elemente şi $n + 1$ submulţimi ale sale. Cele $n+1$ submulţimi au, în total, $3n+3$ elemente, deci există un element $a \in M$ care apare în cel puţin 4 submulţimi A_1, A_2, A_3, A_4. **(3p)**

În afară de a, mulţimile A_2, A_3, A_4 conţin câte unul dintre celelate două elemente ale lui A_1. Astfel, încă unul dintre elementele lui A_1, fie el b, este conţinut de două dintre mulţimile A_2, A_3, A_4; putem presupune $A_1 = \{a, b, c\}, A_2 = \{a, b, d\}$, $A_3 = \{a, b, e\}$. Deoarece A_4 are câte două elemente comune cu A_1, A_2, A_3, acestea nu pot fi decât a şi b. Analog, orice altă submulţime care-l conţine pe a îl conţine şi pe b; de asemenea, orice submulţime care-l conţine pe b îl conţine şi pe a. Fie A reuniunea celor s submulţimi care conţin pe a şi b; A are $s + 2$ elemente, iar cele $n + 1 - s$ submulţimi rămase sunt incluse în mulţimea $M \setminus A$ care are $n - s - 1$ elemente. Însă, conform ipotezei de inducţie, printre submulţimile rămase există două care au exact un element comun – contradicţie. **(2p)**