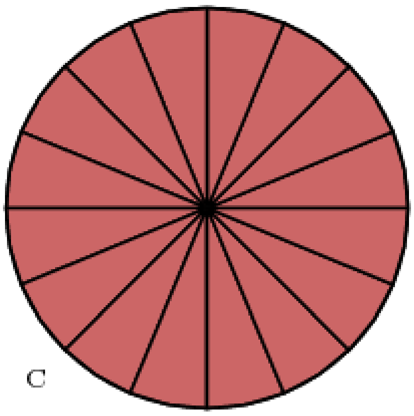
De la metoda indivizibililor la derivata

-un foarte scurt istoric al unor notiuni de analiza matematica-

Metoda indivizibilior

"indivizibili": se vor numi mai tarziu "cantitati infinitezimale", "infiniti mici"

Relatia dintre lungimea cercului si aria sa
Ideea este sa consideram un cerc ca un poligon regulat cu foarte multe laturi, fiecare de lungime "infinitezimala" (latura poligonului se micsoreaza pina devine "indivizibil"-lungimea sa este ceva strict pozitiv dar mai mica decat orice numar pozitiv !)



Fie *A* aria unui poligon regulat cu *n* laturi, de latura *x*, inscris in cercul de raza *R* si arie *S*.

Atunci: $A = \frac{1}{2} a \cdot x \cdot n$, unde *a* este apotema poligonului. Fie $P = xn$ perimetrul poligonului.

Atunci $A = \frac{1}{2} a \cdot P$. Daca nr. de laturi tinde la infinit, atunci aria *A* tinde la *S*, apotema *a* tinde la raza cercului *R*, iar perimetrul *P* tinde la lungimea cercului, notata *L*, deci $S = \frac{1}{2} R \cdot L$.

Aria segmentului de parabola (cu metoda indivizibililor)
Prezentam acum un "calcul algebric" bazat pe metoda indivizibililor.
Sa calculam aria *S* a regiunii cuprinse intre graficul parabolei $y = x^2$, axa *Ox* si dreptele verticale $x=0$ si $x=a$**.**
Consideram *n* "foarte mare" si impartim regiunea de sub parabola in *n* regiuni, fiecare considerata un "segment" ("indivizibil") de inaltime $y = x^2$. Daca segmentele au "grosimea" *d* (sau, echivalent, se afla la distanta *d* unul fata de celalalt), atunci inaltimile segmentelor sunt $d^2, (2d)^2, (3d)^2, \ldots, (nd)^2$ si deci aria este

$$S=(d^2+(2d)^2+...+(nd)^2)d=d^3\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)(nd)^3}{6}$$

Lungimea intervalului fiind *a*, avem *nd=a* , deci:

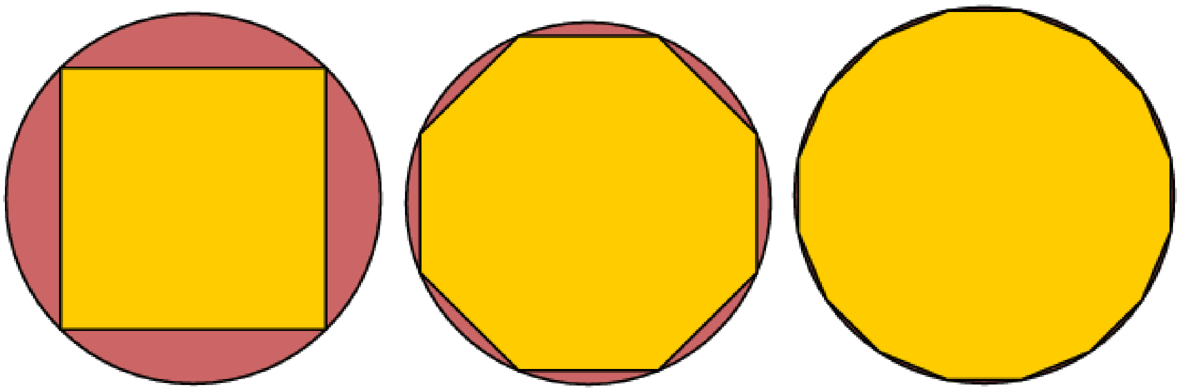
$$S=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)a^3}{6}$$

Pentru *n* foarte mare (tinzand la infinit ?!), rezulta $S=\frac{1}{3}a^3$.

Observatii: Metoda indivizibililor, in ciuda unor rezultate interesante, nu oferea o baza riguroasa (nu se da o definitie pentru "indivizibil") si nici un algoritm de calcul (in exemplul de mai sus este esentiala existenta unei formule cunoscute pentru suma patratelor primelor *n* numere naturale). De exemplu, daca in locul parabolei consideram hiperbola $y=\frac{1}{x}$, metoda nu este eficienta deoarece nu exista o formula pentru suma $1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$. Totusi, metoda permite in unele situatii "ghicirea" unui rezultat plauzibil.
Metoda indivizibililor va fi reluata si dezvoltata in sec. al XVII-lea de Bonaventura Cavallieri (unul dintre pionierii calculului integral).

Metoda exhaustiunii
In cautarea rigorii, Arhimede a completat metoda indivizibililor cu metoda exhaustiunii (metoda "epuizarii"). Ideea era ca, dupa ce se "ghicea" un rezultat plauzibil, se demonstra ca rezultatul corect nu putea fi nici mai mare si nici mai mic, folosind constructii geometrice care permiteau aproximari prin lipsa si prin adaos. Trebuie mentionat ca Arhimede atribuie metoda exhaustiunii lui Eudoxus.
In lucrarea "Masurarea cercului", Arhimede demonstreaza riguros formula ariei cercului folosind metoda exhaustiunii.

Calculul ariei cercului cu metoda exhaustiunii



In termeni actuali rezultatul obtinut de Arhimede se poate enunta astfel:
Fie *C* un cerc de raza *R* si fie *S(C)* aria sa. Fie, pentru orice numar natural *n*, P_n poligonul regulat cu *n* laturi inscris in cercul *C* si fie P_{2n} poligonul regulat cu *2n* laturi inscris in *C* obtinut prin impartirea in doua parti egale a arcelor de cerc corespunzatoare laturilor poligonului P_n (cf. figurii de mai sus). Notam cu $S(P_n)$ aria poligonului P_n si cu *T* aria unui triunghi dreptunghic avand ipotenuza egala cu lungimea cercului (i.e. 2πR) si inaltimea egala cu raza cercului. Atunci $S(C)=T=\pi R^2$.

Pentru demonstratie, Arhimede arata mai intai:

i) $S(C)- S(P_{2n}) < \frac{1}{2}(S(C)- S(P_n))$, $\forall n$; se observa, ca, in termeni moderni, acest fapt implica $S(C)-S(P_n)\to 0$ pentru $n\to\infty$.

ii) $S(P_n) < T$.

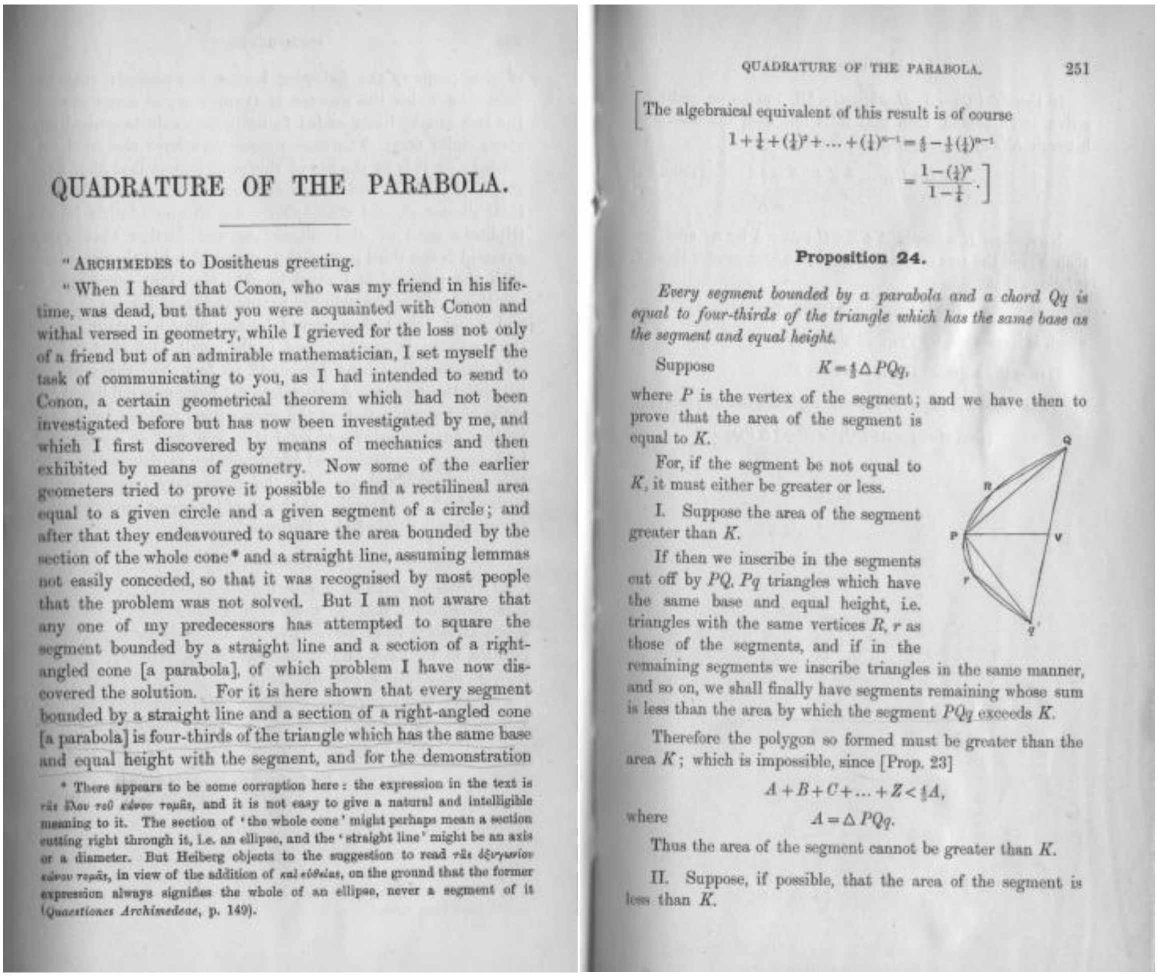
Aplicand metoda exhaustiunii, Arhimede demonstreaza inegalitatile $T \leq S(C)$ si $S(C) \leq T$:
1) $T \leq S(C)$.
Presupunand prin absurd ca ca $S(C)-T > 0$, exista *n* astfel incat

$$S(C)- S(P_n) < S(C)-T$$

Rezulta ca $S(P_n) > T$, contradictie cu (ii).

2. Inegalitatea $S(C) \leq T$ se demonstreaza analog, folosind poligoane circumscrise.

Aria parabolei



QUADRATURE OF THE PARABOLA.

"ARCHIMEDES to Dositheus greeting.

"When I heard that Conon, who was my friend in his lifetime, was dead, but that you were acquainted with Conon and withal versed in geometry, while I grieved for the loss not only of a friend but of an admirable mathematician, I set myself the task of communicating to you, as I had intended to send to Conon, a certain geometrical theorem which had not been investigated before but has now been investigated by me, and which I first discovered by means of mechanics and then exhibited by means of geometry. Now some of the earlier geometers tried to prove it possible to find a rectilineal area equal to a given circle and a given segment of a circle; and after that they endeavoured to square the area bounded by the section of the whole cone* and a straight line, assuming lemmas not easily conceded, so that it was recognised by most people that the problem was not solved. But I am not aware that any one of my predecessors has attempted to square the segment bounded by a straight line and a section of a right-angled cone [a parabola], of which problem I have now discovered the solution. For it is here shown that every segment bounded by a straight line and a section of a right-angled cone [a parabola] is four-thirds of the triangle which has the same base and equal height with the segment, and for the demonstration

* There appears to be some corruption here: the expression in the text is τᾶς ὅλου τοῦ κώνου τομᾶς, and it is not easy to give a natural and intelligible meaning to it. The section of 'the whole cone' might perhaps mean a section cutting right through it, i.e. an ellipse, and the 'straight line' might be an axis or a diameter. But Heiberg objects to the suggestion to read τᾶς ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, in view of the addition of καὶ εὐθείας, on the ground that the former expression always signifies the whole of an ellipse, never a segment of it (*Quaestiones Archimedeae*, p. 149).

[The algebraical equivalent of this result is of course

$$1+\tfrac{1}{4}+(\tfrac{1}{4})^2+\ldots+(\tfrac{1}{4})^{n-1}=\tfrac{4}{3}-\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4})^{n-1}$$
$$=\frac{1-(\tfrac{1}{4})^n}{1-\tfrac{1}{4}}.]$$

Proposition 24.

Every segment bounded by a parabola and a chord Qq is equal to four-thirds of the triangle which has the same base as the segment and equal height.

Suppose $K=\tfrac{4}{3}\triangle PQq$,

where P is the vertex of the segment; and we have then to prove that the area of the segment is equal to K.

For, if the segment be not equal to K, it must either be greater or less.

I. Suppose the area of the segment greater than K.

If then we inscribe in the segments cut off by PQ, Pq triangles which have the same base and equal height, i.e. triangles with the same vertices R, r as those of the segments, and if in the remaining segments we inscribe triangles in the same manner, and so on, we shall finally have segments remaining whose sum is less than the area by which the segment PQq exceeds K.

Therefore the polygon so formed must be greater than the area K; which is impossible, since [Prop. 23]

$$A+B+C+\ldots+Z<\tfrac{4}{3}A,$$

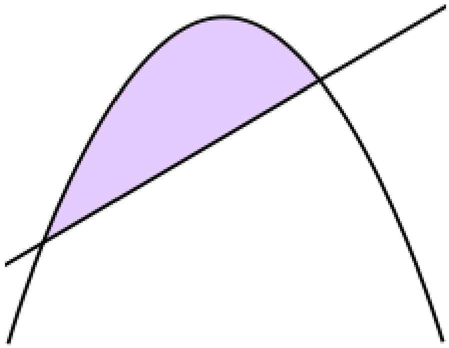
where $A=\triangle PQq$.

Thus the area of the segment cannot be greater than K.

II. Suppose, if possible, that the area of the segment is less than K.

Pagini din lucrarea lui Arhimede asupra cuadraturii parabolei

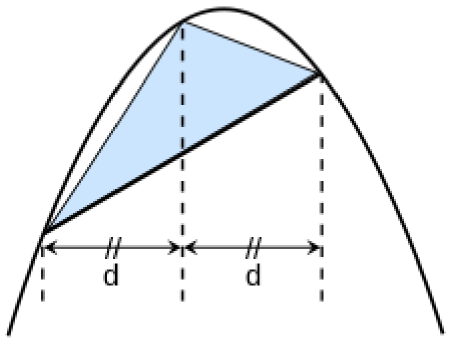
Conicele (intersectiile unui plan cu un con circular drept) au fost definite si studiate pentru prima oara de Apoloniu (din Perga). Lucrarea sa fundamentala, "Konika", contine principalele proprietati ale conicelor (elipsa, hiperbola, parabola), studiul acestora fiind reluat in perioada Renasterii. Arhimede, in tratatul sau "Cuadratura parabolei" (lucrarea contine 24 de "propozitii"), rezolva problema ariei regiunii marginite de un arc de parabola si o coarda (numit si segment de parabola - vezi figura de mai jos).

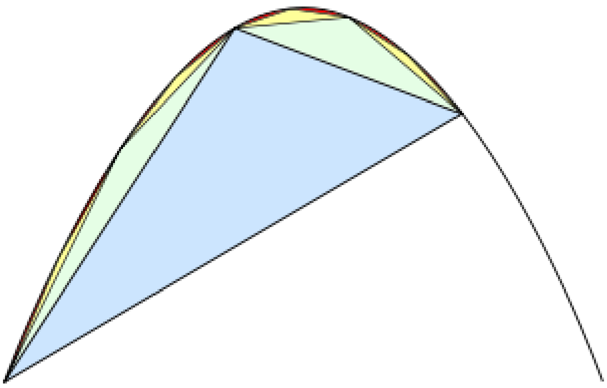


segment de parabola

Ideea demostratiei este aceea de a descompune segmentul de parabola intr-o infinitate de triunghiuri (cf. figurile de mai jos).
Arhimede demostreaza ca aria fiecarui triunghi verde este de 8 ori mai mica decat aria triunghiului albastru, etc. In plus, triunghiurile obtinute repetand la nesfarsit procedeul descris in figura "epuizeaza" aria segmentului de parabola; deci, notand cu T aria triunghiului albastru, avem:

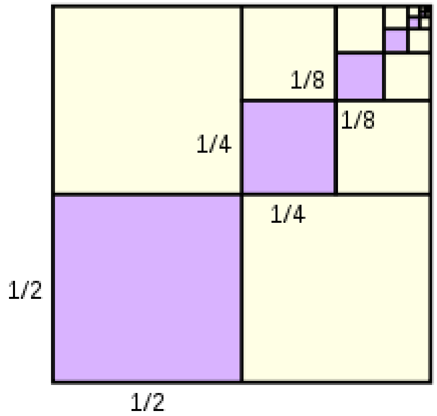
$$\textit{Aria segmentului de parabola} = T + 2\frac{T}{8} + 4\frac{T}{64} + 8\frac{T}{512} + ... = T + T\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4^n}$$





Aria unui triunghi verde este 1/8 din aria triunghiului albastru, aria unui triunghi galben este 1/8 din aria unui triunghi verde, etc.

Pentru a calcula suma seriei geometrice cu ratia $\frac{1}{4}$, $S=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4^n}$, Arhimede face constructia:



Din figura, rezulta $3S=1$, deci $S=\frac{1}{3}$; in concluzie, aria segmentului de parabola este $\frac{4}{3}T$.

Vom reveni la problema (delicata) a "sumelor infinite".

Cuadratura hiperbolei

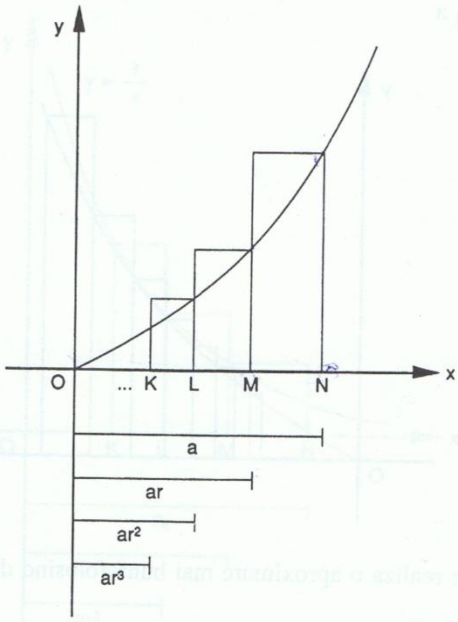
Arhimede nu a reusit sa calculeze ariile determinate de celelalte conice (elipsa, hiperbola). Problema a ramas nerezolvata pina la jumatatea secolului al 17-lea, desi au fost facute diverse incercari (in special cu metoda indivizibililor - Kepler, Cavallieri). Una din problemele celebre era calculul "ariei hiperbolei", sau, in termeni moderni, calculul ariei marginite de axa Ox, dreptele verticale $x=a$ si $x=b$ si hiperbola, i.e. graficul "functiei" $y=\frac{1}{x}$ (parabola are ecuatia $y=x^2$). Mai general, se punea problema pentru o functie putere, $f(x)=x^s$ cu exponentul s numar real; aceste functii erau numite si "parabole generalizate" (cazul hiperbolei se obtine pentru s = -1).

Metoda lui Fermat pentru cuadratura functiilor putere $f(x)=x^s$, $s\neq -1$

In esenta, metoda lui Fermat este o "combinatie" intre metoda exhaustiunii si metoda indivizibililor, considerand diviziuni "bine alese" pe axa Ox si considerand apoi distanta dintre doua puncte alaturate ca fiind un "indivizibil".

Fie functia $f(x)=x^s$, $s\neq -1$. Pentru a calcula aria marginita de axa Ox, graficul functiei f, axa Oy si dreapta verticala $x=a$, Fermat considera, pe axa Ox, o diviziune (infinita !) de puncte in progresie geometrica (ratia este $r<1$-cf figurii de mai jos):

$$....., ar^k, ar^{k-1}, ar^{k-2}, ..., ar \, .$$



Noutatea este faptul ca Fermat considera (din start) o infinitate de puncte, ceea ce va conduce la o "suma infinita".
Coordonatele punctelor de pe curba (corespunzatoare absciselor de mai sus) sunt:

$$....., (ar^k)^s, (ar^{k-1})^s, (ar^{k-2})^s, ..., (ar)^s \; , a^s \, .$$

Se considera acum dreptunghiurile cu baza $ar^{k-1} - ar^k$, $k = 1, 2, 3, ...$ si inaltime $f(ar^k) = (ar^k)^s$. Suma ariilor acestor dreptunghiuri (o "suma infinita" !) este:

$$S(r) = a^{s+1}(1-r)\sum_{k\geq 0}(r^{s+1})^k = a^{s+1}\frac{1-r}{1-r^{s+1}}$$

Se observa ca pana la calculul precedent nu a fost nevoie de ipoteza $s \neq -1$. De asemenea, trebuie mentionat ca rezultatul depinde de alegerea ratiei *r*. In continuare, Fermat observa ca suma ariilor dreptunghiurilor "se apropie" de aria ceruta daca baza fiecarui dreptunghi este cat mai mica, ceea ce inseamna ca ratia *r* se apropie de 1; de fapt, trebuie calculata o limita in cazul $\frac{0}{0}$. Fermat rezolva problema simplificand prin 1- *r* (cel putin pentru *s* natural este evident) si apoi pune *r* =1; rezulta:

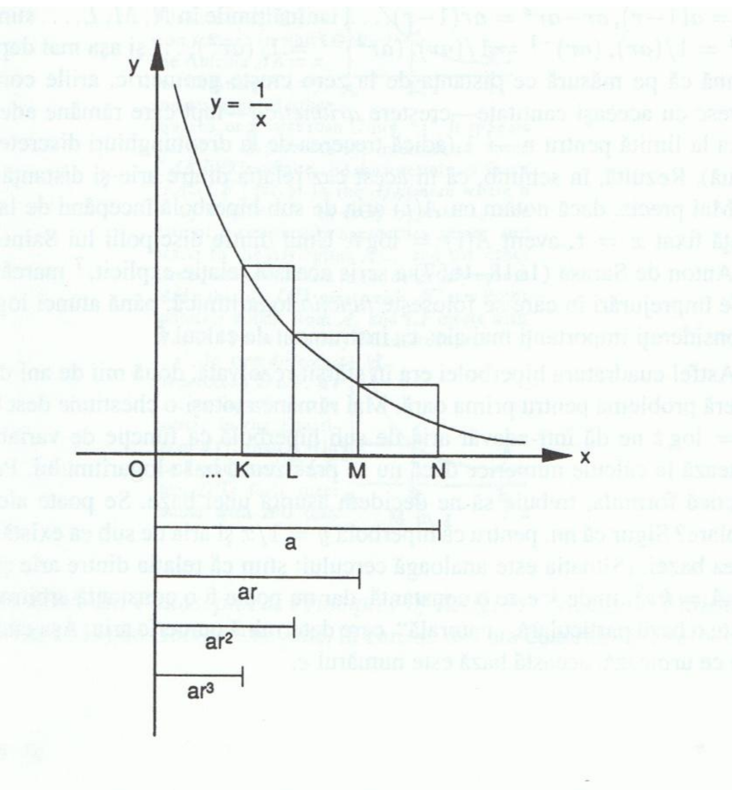
$$S(r) = \frac{a^{s+1}}{1 + r + r^2 + ... + r^s} \quad \to \frac{a^{s+1}}{s+1} \text{ pentru } r \to 1 \, .$$

Metoda de mai sus se poate aplica pentru orice exponent $s \neq -1$(Fermat a facut mai intai rationamentul pentru *s* natural, generalizand ulterior). Problema ramanea nerezolvata pentru hiperbola! Astazi stim de ce problema este "altfel" pentru hiperbola: primitiva oricarei functii putere $f(x)=x^s$ este tot o functie putere, cu exceptia cazului s = -1, cand primitiva este logaritmul natural. Mai trebuie mentionat ca, pentru exponent natural (sau, mai general, pozitiv), rezultatul a fost obtinut in mod independent si de alti matematicieni, printre altii, de John Wallis si Bonaventura Cavallieri.

Cuadratura hiperbolei (Gregoire de Saint Vincent)

Un iezuit belgian, Gregoire de Saint Vincent se pare ca a fost primul care a observat (in jurul anului 1631, dar lucrarea a fost publicata in 1647), ca, aplicand metoda lui Fermat hiperbolei $f(x)=\dfrac{1}{x}$, ariile dreptunghiurilor sunt egale (consideram dreptunghiurile "mari", de exemplu):

$$\text{aria unui dreptunghi} = (ar^{k-1}-ar^{k})\frac{1}{ar^{k-1}} = 1-r, \forall k = 1,2,3,...$$



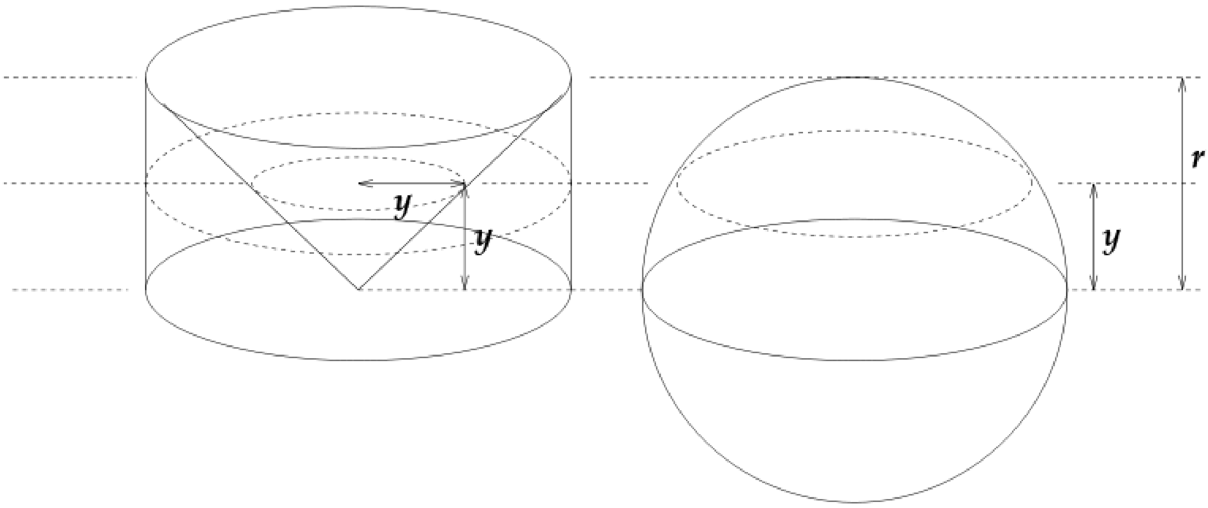
Cuadratura hiperbolei

Deci, atunci cand abscisa creste in progresie geometrica, aria de sub hiperbola creste in progresie aritmetica! Imediat, s-a facut legatura cu functia logaritmica (primul tratat despre logaritmi fusese publicat in 1614 de John Napier); mai ramanea de rezolvat problema "bazei" logaritmului (numarul e), problema rezolvata in mod independent, printre altii, de Nicolaus Mercator, William Brouncker si Newton (care a descoperit, inca inainte de 1665, "seria logaritmica": $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+....$, $\forall x\in(-1,1)$, folosind generalizarea formulei binomiale pentru exponent negativ si "integrarea termen cu termen").

Metoda indivizibililor perfectionata: Bonaventura Cavalieri (1630)
In incercarea de a da rigoarea metodei indivizibililor, Cavalieri da cateva enunturi si perfectioneaza aplicarea metodei. Una din teoremele sale este:
Fie A si B doua regiuni plane marginite de doua drepte paralele; daca orice paralela la cele doua intersecteaza pe A si B dupa segmente de lungimi egale, atunci A si B au arii egale.
In mod analog, se poate enunta un rezultat si pentru volume.
Ca aplicatie, iata demonstratia lui Cavalieri pentru formula volumului sferei.

Vom presupune ca este cunoscuta formula pentru volumul conului: $Vol_{con} = \frac{1}{3} A_B \cdot h$, unde A_B este aria bazei, iar h este inaltimea.

Fie o sfera de raza R si fie un cilindru de raza R si inaltime tot R (vezi figura de mai jos):



Fie un plan situat la distanta y fata de baza cilindrului si consideram sectiunile acestui plan cu sfera si conul. Cercul de intersectie cu semisfera are aria $\pi(R^2 - y^2)$. Intersectia acestui plan cu cilindrul este un cerc de raza R, iar intersectia cu conul este un cerc cu raza *y*. Deci aria sectiunii cu corpul dintre cilindru si con este tot $\pi(R^2 - y^2)$. Conform principiului lui Cavalieri, volumul semisferei si volumul corpului dintre cilindru si con sunt egale; deci:

$$Vol_{sferei} = 2(Vol_{cil} - Vol_{con}) = 2\left(\pi R^3 - \frac{\pi R^3}{3}\right) = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Metoda lui Fermat pentru determinarea extremelor locale
Fie f o functie. Fermat descrie urmatorul "algoritm" pentru a gasi extremele locale (de fapt o conditie necesara):

1. Se scrie "egalitatea" $f(x) \approx f(x+t)$. Fermat foloseste termenul "adequalitas", "adequare" (imprumutat de la Diofant) cu semnificatia de "aproximativ egal".

2. Se fac calculele si se imparte "egalitatea" cu *t*.
3. Se face *t=0*. (Desigur, trebuie facuta mai intai o simplificare prin *t*).
4. Se rezolva ecuatia obtinuta; solutiile sunt extremele locale (de fapt satisfac conditia necesara, exprimata in termeni actuali prin $f'(x)=0$).

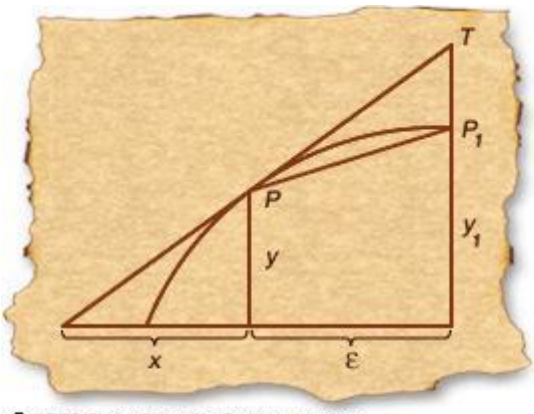
Desigur, algoritmul precedent (care depinde in mod esential de existenta, la pasul 3, a unor artificii de calcul) este o forma imprecisa de a defini derivata functiei f :

$$f'(x)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}$$

Leibniz si Newton il citeaza in mod sistematic pe Fermat atunci cand definesc (fiecare in mod independent si original, dar echivalent) notiunea de derivata.

Ulterior, Fermat adapteaza algoritmul de mai sus pentru a defini tangenta la o curba, iar metoda propusa de el pentru aflarea extremelor este echivalenta cu afirmatia ca intr-un punct de extrem local tangenta la grafic este orizontala (in esenta, acest rezultat este cunoscut azi sub numele de "teorema lui Fermat").

Metoda lui Fermat pentru tangenta la o curba.
Si Leibniz si Newton au considerat ca ideea de a aproxima tangenta cu o coarda "apropiata" ii apartine lui Fermat.



Fie functia f si fie un punct *P(x,y)* pe grafic.
Pentru a gasi tangenta *PT* in punctul *P(x,y)* consideram un alt punct pe curba, $P_1(x+\varepsilon, y_1)$ si trasam coarda PP_1. Pentru ε foarte mic, panta dreptei PP_1 este "aproximativ egala" cu panta tangentei *PT*. De fapt Fermat simplifica raportul $\dfrac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}$ prin ε si apoi pune $\varepsilon=0$.
Desigur, metoda presupune un artificiu de calcul depinzand de forma concreta a functiei *f*.

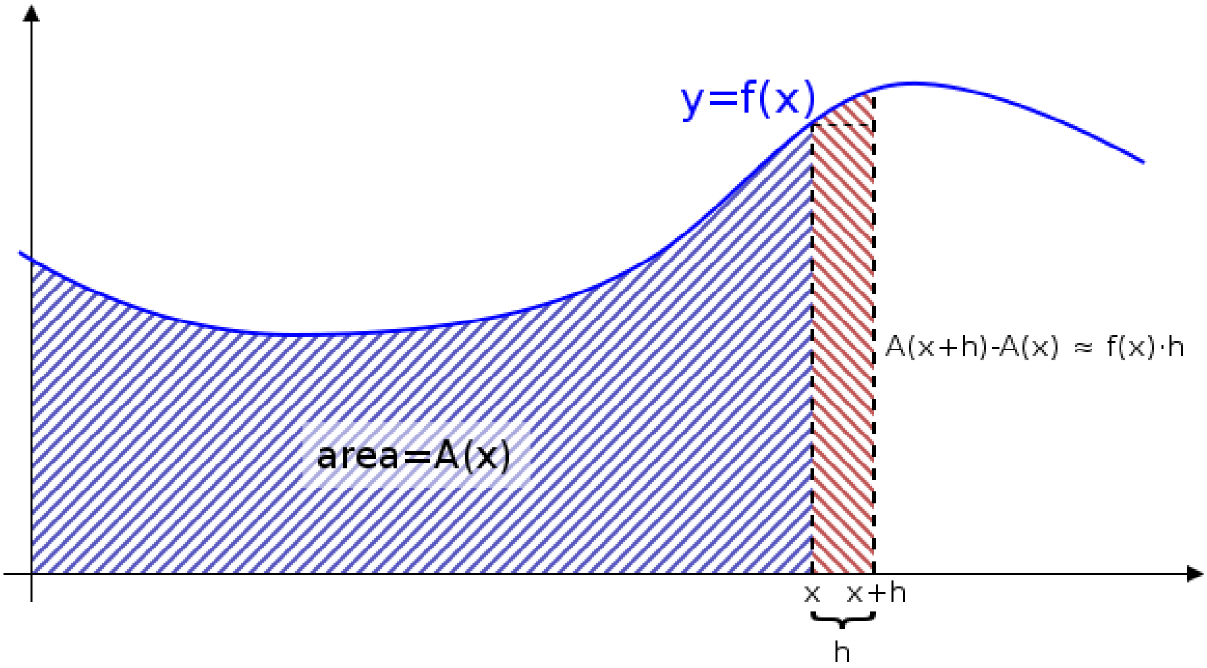
Formula fundamentala a calculului diferential si integral
La jumatatea sec. al 17-lea, se adunasera o serie de rezultate care constituiau in fapt ideile de baza ale calculului diferential si integral. Totusi, lipseau ideile "unitare", capabile sa inlocuiasca ingeniozitatea geometrica si artificiile algebrice cu metode generale si sistematice de rezolvare a problemelor. Aceste metode au fost descoperite de Isaac Newton (1642- 1727) si Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716). Cei doi au reusit sa defineasca (desi nu in mod riguros - lipsea inca notiunea de limita!) notiunile generale de integrala si derivata si sa le aplice corect pentru a rezolva numeroase probleme. Forta metodei lor consta in caracterul "algoritmic" - spre deosebire de incercarile particulare de pana atunci. Nu intram in amanunte aici, vom prezenta doar rationamentul care i-a condus pe cei doi (in mod independent) la formula fundamentala a calculului diferential si integral (numita si formula Leibniz-Newton) si "definitiile" date de Leibniz derivatei si integralei.
Derivata definita de Leibniz
"Explicatia" lui Leibniz in incercarea sa de a defini derivata functiei *y=f (x)* incepe prin formarea catului

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

Limita acestui cat pentru $\Delta x \to 0$ este derivata functiei *f* in punctul *x,* notata astazi $f'(x)$ (notatie introdusa de Lagrange). Leibniz foloseste pentru aceasta limita notatia $\frac{dy}{dx}$, sugerand ca derivata este un "raport" intre doua cantitati infinitezimale (acest fapt ne aduce aminte de indivizibili). El spune:
" Δx nu tinde la zero. In schimb, "ultima valoare" a lui Δx nu este zero, ci o cantitate "infinit mica" , o "diferentiala" , numita *dx* ; in mod similar, Δy are o "ultima" valoare infinit mica, *dy*. Catul acestor doua diferentiale infinit mici este un numar obisnuit, $\frac{dy}{dx}$."
Conform acestei "definitii", Leibniz numea derivata "cat diferential". Cantitatile "infinit mici" erau considerate ca un "tip nou de numere", care erau nenule dar mai mici decat orice numar real pozitiv. Este clar ca nu era comod de lucrat cu o asemenea notiune si numai cei cu adevarat talentati puteau aborda probleme de calcul diferential si integral. Trebuie mentionat ca Leibniz si Newton si toti marii matematicieni din secolele 17 si 18 - fratii Jakob si Johann Bernoulli, Leonhardt Euler, etc. - au reusit sa dezvolte si sa aplice corect metodele calculului diferential si integral chiar si in absenta unor definitii riguroase pentru derivata si integrala. Acestea vor veni in sec 19, o data cu definirea conceptului de limita.
Integrala
In mod asemanator, integrala era considerata o "suma infinita " a unor "cantitati infinit de mici", *f(x)dx* . Leibniz a notat aceasta "insumare" cu simbolul $\int f(x)dx$, pastrat si astazi (ca si notatia sa pentru derivata, $\frac{dy}{dx}$).

Formula fundamentala
Notiunile de integrala si (intr-o masura mai mica) cea de derivata aparusera inca inainte de Leibniz si Newton. Era nevoie de descoperirea legaturii dintre cele doua. Intr-un anumit sens, integrarea si derivarea sunt operatii inverse.
Fie *f* o functie (putem presupune ca este pozitiva, pentru a avea intuitia ariei-dar nu este o

conditie necesara) si fie functia $A(x)=\int_a^x f(u)du$, functia care reprezinta aria dintre axa Ox si graficul functiei *f* intre *a* si *x* (cf. figurii de mai jos).



Teorema fundamentala afirma ca $A'(x)=f(x)$.
Intuitiv, justificarea este urmatoarea: pentru $h > 0$, diferenta $A(x+h)-A(x)$ este aria intre *x* si *x+h* (rosu pe figura de mai sus). Daca notam cu *m* si cu *M* valoarea minima si, respectiv, maxima ale lui *f* pe intervalul [*x* , *x+h*] , atunci:

$$mh \le A(x+h)-A(x) \le Mh$$

Rezulta:

$$m \le \frac{A(x+h)-A(x)}{h} \le M$$

Presupunand acum ca *f* este continua, trecand la limita pentru $h \to 0$, rezulta: $A'(x)=f(x)$.
Desigur, rationamentul intuitiv de mai sus trebuie completat cu justificari riguroase, dar se pot observa ideile naturale care stau la baza calculului diferential si integral. Este si un argument pentru o alta abordare (didactica) a lectiilor despre derivata si integrala, alta decat abordarea uzuala in care cele doua notiuni sunt prezentate separat si in ani diferiti de studiu.

Despre "sumele infinite" - seriile
Asa cum s-a observat, sumele infinite au aparut inca din antichitate. Paradoxul dihotomiei al lui Zenon (care conduce la seria geometrica de ratie 1/2), sau aria segmentului de parabola sunt probleme clasice care conduc la serii. In secolul al 14-lea, Nicolas Oresme a aratat divergenta seriei armonice, iar in sec. al 17-lea Gregory, Newton, Leibniz, s.a., au rezolvat probleme celebre (de exemplu, seria logaritmica a lui Newton sau "seria lui Leibniz", $\sum_{n\ge1}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$). Desigur, asa cum am vazut si in exemplele anterioare, demonstratiile nu intruneau standardele actuale de rigoare. Pentru a pune in evidenta cateva din dificultatile dar si implicatiile profunde ale teoriei seriilor, dar si pentru a ilustra rationamentul si intuitia

maestrilor care au pus bazele calculului diferential si integral, prezentam o problema celebra: "seria lui Euler": $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ (numita, datorita fratilor Jakob si Johann Bernoulli si "problema de la Basel").
Revenim acum la seria lui Euler. Problema pare sa fi fost enuntata pentru prima data in 1644 de Pietro Mengoli si aproape toti marii matematicieni ai vremii au incercat sa o rezolve (printre altii: John Wallis in 1655, Leibniz, Jakob si Johann Bernoulli dupa 1691), ajungand cea mai cunoscuta problema a timpului respectiv. In anul 1734, Leonhard Euler publica rezultatul (dand trei demonstratii), dupa ce, in prealabil, incepand cu 1730, obtinuse aproximari din ce in ce mai bune ale sumei seriei (6 zecimale exacte in 1731, 20 de zecimale exacte in 1733). Intr-o serie de articole ulterioare, (pana in 1748) Euler a reluat problema, publicand mai multe solutii, extinzand o serie de rezultate si imbunatatind rigoarea argumentelor.

Aproximarea sumei

Dificultatea obtinerii unui rezultat aproximativ provine din faptul ca seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge foarte incet. Euler a construit seria $\ln^2 2+2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2 2^n}$ despre care a demonstrat ca are aceeasi suma cu $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$, dar converge mult mai repede. In acest fel, Euler a obtinut pentru suma seriei aproximarea 1,644944.

Calculul sumei seriei

In 1734 Euler publica mai multe solutii bazate in mod esential pe analogia dintre serii de puteri si polinoame. Mai precis, extrapoleaza unele relatii intre radacinile si coeficientii unui polinom la serii de puteri. Fie $P(x)=a_0-a_1x^2+a_2x^4+...+(-1)^n a_n x^{2n}$ un polinom de gradul $2n$ cu coeficienti reali, avand numai termeni de grad par si avand toate radacinile reale, nenule si simple: $x_1,-x_1,x_2,-x_2,...,x_n,-x_n$. Din relatiile dintre radacini si coeficienti rezulta:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k^2}=\frac{a_1}{a_0} \qquad (*) .$$

Euler obtinuse deja seria de puteri a functiei sinus:

$$\sin x=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \forall x\in\mathbb{R} .$$

Considerand seria de puteri (pare) a functiei "sinus atenuat":

$$\frac{\sin x}{x}=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}, \forall x\in\mathbb{R},$$

Euler extrapoleaza formula $(*)$ de la polinoame la serii de puteri si obtine:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n\pi)^2}=\frac{1}{3!},$$

ceea ce conduce la rezultatul $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Desigur, Euler era constient de punctele slabe ale rationamentelor sale: nu toate rezultatele adevarate pentru polinoame sunt adevarate pentru serii de puteri. Totusi, Euler era sigur ca rezultatul este corect pentru ca el concorda cu aproximarile obtinute anterior.
Trebuie mentionat ca exista serii de puteri care nu satisfac relatii de tipul $(*)$.Un exemplu simplu in acest sens este dat de seria geometrica; fie functia:

$$f(x)=2-\frac{1}{1-x}=1-x-x^2-x^3-....,\forall x\in(-1,1).$$

Ecuatia *f(x)* = 0 are o singura solutie: $x=2^{-1}$. Pe de alta parte, daca incercam sa extrapolam formula pentru suma inverselor radacinilor unui polinom la seria de puteri a functiei f, obtinem o contradictie: 2 = 1.
Cu acelasi tip de rationament, suma seriei $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ se poate calcula si plecand de la seria de puteri a functiei

$$\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^n .$$

O aplicatie in teoria probabilitatilor
Incheiem aceasta prezentare a problemei de la Basel cu o aplicatie in teoria probabilitatilor. Orice serie convergenta cu termeni pozitivi $\sum_{n\geq 1}a_n=S$ defineste o distributie discreta de probabilitate $p_n=\frac{a_n}{S}, n=1,2,3,...$ O variabila aleatoare astfel distribuita ia valoarea a_n cu probabilitatea p_n. In cazul seriei lui Euler, rezulta distributia de probabilitate $p_n=\frac{6}{\pi^2}\cdot\frac{1}{n^2}$.
Ne propunem sa rezolvam urmatoarea problema:
Fie $n=1,2,3,...$ fixat; care este probabilitatea ca alegand la intamplare doua numere naturale nenule acestea sa aiba cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.) egal cu *n* ?
Vom demonstra in continuare ca raspunsul este $p_n=\frac{6}{\pi^2}\cdot\frac{1}{n^2}$. Intr-o formulare echivalenta, variabila aleatoare (discreta) $X:\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$, care asociaza unei perechi de numere naturale nenule (k_1,k_2), c.m.m.d.c. al numerelor k_1 si k_2 are distributia de probabilitate $p_n=\frac{6}{\pi^2}\cdot\frac{1}{n^2}$, i.e. $P(X=n)=p_n=\frac{6}{\pi^2}\cdot\frac{1}{n^2}$.
Vom nota cu q_n probabilitatea ca alegand la intamplare doua numere naturale nenule acestea sa aiba c.m.m.d.c. egal cu *n* si vom demonstra ca $q_n=p_n$
Vom nota c.m.m.d.c. a doua numere *a* si *b* cu *D(a; b).* Daca *a* si *b* sunt doua numere naturale nenule, atunci *D(a; b) = n* daca si numai daca sunt adevarate urmatoarele doua afirmatii:

(i) a si b sunt multipli de n;

(ii) $D\left(\frac{a}{n},\frac{b}{n}\right)=1$.

Probabilitatea ca un numar natural nenul sa fie multiplu de n este $\frac{1}{n}$, deci probabilitatea ca doua numere naturale nenule sa fie ambele multipli de n este $\frac{1}{n^2}$. Fie acum a si b doi multipli de n; atunci probabilitatea (conditionata de $n|a$ si $n|b$) ca $D\left(\frac{a}{n},\frac{b}{n}\right)=1$ este egala cu probabilitatea neconditionata ca doua numere naturale nenule (arbitrare) sa fie prime intre ele, deci este q_1. Din faptul ca evenimentele (i) si (ii) sunt independente, rezulta $q_n=\frac{1}{n^2}q_1$. Pe de alta parte, din conditia $\sum_{n\geq 1} q_n=1$, rezulta $q_1=\frac{6}{\pi^2}$, ceea ce incheie demonstratia.

Bibliografie

http://jwilson.coe.uga.edu/EMT668/EMAT6680.F99/Erbas/emat6690/essay1/essay1.html

http://www.ams.org/samplings/feature-column/fc-2012-02

http://www.ams.org/samplings/feature-column/fc-2012-02

http://www.math.ubc.ca/~cass/archimedes/parabola.html

http://www.math.ufl.edu/~joelar/FermatsIntegration.pdf