Profesorul Dan Barbilian

Sergiu Rudeanu

February 22, 2013

Draft

Abstract

The Romanian geometer and algebraist Dan Barbilian was not only a great mathematician, but he was also a great poet, under the name Ion Barbu. This paper begins by emphasizing the peculiarities of the mathematical language of Dan Barbilian: they reveal the basic presence of Ion Barbu in the mathematical work of Dan Barbilian. Then we argue that the mathematical research of Dan Barbilian is inseparable from his teaching. Another major point of this paper refers to the fact that Barbilian used to split one theorem into several propositions which point out the rôle of each hypothesis in the main theorem.

Personalitatea fascinantă a matematicianului şi poetului Dan Barbilian stârneşte un interes mereu viu. Textul care urmează nu are pretenţia unui studiu global al activităţii didactice sau ştiinţifice a lui Dan Barbilian, ceea ce ar constitui o întreprindere foarte greu de realizat. Dar am fost marcat de cursurile profesorului Barbilian, iar influenţa lui asupra mea a crescut, în mod aparent paradoxal, în anii maturităţii mele matematice, adică după dispariţia fizică a profesorului. Iată de ce simt acum nevoia de a decanta aminirile mele şi de a-mi cristaliza o viziune proprie asupra personalităţii lui complexe. Altfel spus, adică împrumutând pentru un moment limbajul maestrului, voiesc a înfăţişa un tablou impresionist al lui Dan Barbilian.

Am fost studentul lui Dan Barbilian în anul 1956, la cursul de teoria numerelor din semestrul de vară şi la cel de bazele geometriei din semestrul de iarnă, respectiv în anii IV şi V de facultate. Studiul de faţă se întemeiază (aşa ar fi spus DB!) pe amintirile mele puternice de la acele cursuri şi pe lecturi ulterioare.

După §1 consacrat limbajului, paragraful al doilea încearcă să pună în evidenţă alte trăsături care singularizează lecţiile lui Barbilian. Una din ele este folosirea oarecum paradoxală a notelor de curs, nelipsite la fiecare lecţie. Altă notă specifică este faptul că la Barbilian nu putem separa activitatea didactică de cercetarea ştiinţifică: el nu ezită să plaseze foarte multe rezultate ale cercetărilor proprii în prelegerile destinate studenţilor, iar apariţia lecţiilor în formă litografiată o asimilează cu memorii publicate. Nu în ultimul rând, Barbilian obişnueşte să despice o teoremă importantă în mai multe propoziţii care pun în evidenţă rolul diverselor ipoteze ale teoremei principale.

Ultimele două paragrafe încheie lucrarea cu exemple din cursurile pe care le-am urmat.

1 De la Ion Barbu la Dan Barbilian

In acest paragraf începem prin a schiţa un dicţionar al notaţiei şi termenilor matematicii proprii ale lui Dan Barbilian. Continuăm cu citate care scot în evidenţă atât particularităţile limbajului lui Barbilian, cât şi unele aspecte surprinzătoare ale gândirii sale.

Relaţia de apartenenţă este notată predominant cu $\rightarrow$. Mai rar, foloseşte totuşi semnul $\in$, făcând distincţia între $a \in A$, o apartenenţă dată prin ipoteză, şi $c \rightarrow C$, însemnând o apartenenţă care este consecinţă a unei demonstraţii sau a unei definiţii. Un exemplu tipic: axiomele privind existenţa unei operaţii, de exemplu la grupuri scrie că dacă $a, b \in \mathcal{G}$, atunci $ab = c,\ c \rightarrow \mathcal{G}$. De aici provine si denumirea de *axioma implicaţiei* şi folosirea frecventă a unor exprimări de tipul ,,produsul este *implicat*".

Pentru numerele întregi foloseşte denumirea de *întregi raţionali*, iar mulţimea lor o notează cu $\mathcal{C}$.[1] Mulţimea numerelor raţionale era notată cu R.

Formula $\mathcal{O}\underline{\rightarrow}\Omega$ însemna că inelul Ω este imagine omomorfă [sic] a inelului $\mathcal{O}$, iar isomorfismul era notat cu $\overset{\rightarrow}{\leftarrow}$.

Asocierea pentru care azi folosim semnul $\mapsto$ era notată cu $>>>\longrightarrow$.

Folosea mult literele caligrafice, dar nu avea standarde de folosire specializată a diverselor tipuri de caractere: latine, caligrafice, greceşti, etc.

Dintre termenii matematici proprii lui Barbilian, preţuiesc cel mai mult : *mulţimea deşartă*, pentru mulţimea vidă.

Pare curios faptul că noţiunea de funcţie nu este cristalizată la Barbilian aşa cum suntem obişnuiţi astăzi: cf. [8], 38-39. Totuşi, *nelacunar* însemna surjectiv, iar *valorifică* însemna ,,ia valori". Pentru o funcţie $f : A \longrightarrow B$ şi un element $b \in B$, *ramificarea totală* a lui b însemna mulţimea $f^{-1}(b)$.

Inelul de ansamble era mulţimea părţilor unei mulţimi.

Barbilian folosea adjectivul *veritabil* în situaţiile pentru care astăzi folosim termenul *propriu*; de exemplu, un *ideal veritabil* însemna un ideal care nu coincide cu întregul inel. Pentru Barbilian teoria idealelor însemna o teorie a divizibilităţii, aşa încât folosea termenul *ideal nedivizibil* pentru ideal maximal.

In cadul mulţimilor bine-ordonate, Barbilian se referă ls *succesivul imediat* al unui element [6].

Mai putem observa că Barbilian umanizează obiectele matematicii. Cuvântul *cerere*, care sugerează o acţiune umană, este mult folosit de Barbilian cu înţelesul de axiomă. Un element sau o structură *ascultă* de o teoremă sau o axiomă, dar mai ales, o teorie matematică *se lasă dedusă* dintr-un număr finit de axiome.

[1] La Barbilian literele caligrafice apar chiar ca litere scrise de mână.

Comentând *cererea independenţei* unui sistem de axiome, Barbilian ne explică faptul că ea a apărut din dorinţa ca ,,sistemul de axiome să nu fie *pletoric*, ci minimal". Mult mai frumos spus decât cu termenul actual: ,,redundant" !

In afară de limbajul matematic propriu-zis, scrierile lui Dan Barbilian mai prezintă numeroase alte particularităţi, pe care le schiţez în continuare.

Incep cu folosirea câtorva cuvinte în forme care în zilele noastre au ieşit din uz. In primul rând, *complect* (îmi amintesc foarte bine că prin anii '40, aceasta era forma care se folosea, nicidecum ,,complet"). Apoi *limbagiu, peisagiu*, . . . , etc. De asemenea, *a resolvi* ([1], pag. 28); aşa apare acest verb în Gazeta Matematică interbelică, iar în zilele noastre s-a păstrat forma ,,rezolvitor". Nu ştiu dacă forma *contribuesc* ([8], pag. 502) era în uz sau o creaţie proprie. Cred însă că îi aparţine forma pe care o foloseşte pentru ştiinţa noastră: ,,lucrări de *matematice*,..., profesor suplinitor de *matematice*,..., doctor în *matematice*", etc. ([9], pag. 9).

Mai departe ajungem în domeniul certitudinilor, adică al formelor şi exprimărilor care îi aparţin cu siguranţă şi care împreună alcătuesc limbajul inconfundabil Dan Barbilian–Ion Barbu.

Incep cu o particularitate ortografică: peste tot în scrierile sale, Barbilian pune virgulă înaintea conjuncţiei *că*: ,,se ştie, că două conexiuni...", ,,observăm, că dacă presupunem...", ,,vrem să arătăm, că avem...", etc.

O exprimare care apare mereu este *se acoperă cu* pentru ,,coincid(e) cu".

Dan Barbilian–Ion Barbu are voluptatea cuvintelor rare. De exemplu, ,,sănătatea lui Galois *scăpăta* tot mai mult". DEX confirmă: *a scăpăta* poate să însemne ,,a asfinţi, a cădea, a se cufunda". In altă parte, Barbilian scrie: ,,La aceste lecţii se pot *încă* prelucra mai amănunţit aceste probleme" ([8], pag. 506). Din nou, DEX confirmă: *încă* are şi înţelesul ,,de asemenea" (regionalism).

Referindu-se la teoriile care studiază inelele necomutative, Barbilian consideră că ele ,,sunt *tăiate pe măsura* cazului comutativ". Pentru a menţiona sursa unor informaţii, Barbilian ne spune că a ,,*împrumutat acestor cărţi* cea mai mare parte a referinţelor istorice" ([8], pag. 219), când mai degrabă le-a ,,împrumutat" *din* aceste cărţi (situaţie asemănătoare la [3], pag. 86).

Mi se pare evident că în limbajul lui Dan Barbilian se manifestă şi influenţa limbii germane. Foloseşte construcţii compacte tipic anglo-saxone, cum ar fi *întemeierea grupal-teoretică a mecanicei*, iar *egal îndreptăţite* pare tradus direct din germană (*gleichberechtigt*). Tot aşa, *locurile de anulare* (*Nullstellen*) sunt zerourile unui polinom. Academicianul Solomon Marcus vede influenţa germană şi în faptul că ,,Barbilian nu s-a prevalat niciodată de expresii ca ′se vede uşor că′ sau ′este evident că′, obicei pe care matematicienii români l-au preluat de la francezi".

Prezenţa esenţială a lui Ion Barbu în opera lui Dan Barbilian, invocată mai înainte, nu se limitează la limbaj. Ea se manifestă în tot ceea ce ţine de personalitatea lui Ion Barbu, bine cunoscută în lumea literelor. Cred că exemplele care urmează sunt edificatoare.

Profesorul Barbilian manifestă interes pentru datele biografice; el merge de la scurte notiţe, uneori însoţite de comentarii surprinzătoare, până la ample evocări ale unor matematicieni de seamă. ,,Numitorul comun" ar fi că Barbilian încearcă să explice opera prin personalitatea creatorului.

De exemplu, despre Felix Klein ne spune: ,,născut la Düsseldorf dintr-un tată măcelar, deţine de la mama sa belgiană facultatea eminamente latină de a stăpâni masa faptelor şi de a statua asupra acestora" [sic!], apoi aflăm că în călătoria sa de studii la Paris, ,,în anii războiului din 1870, a cunoscut pe Sophus Lie şi *s-a împărtăşit* din ideile grupal-teoretice ale acestuia".

Barbilian are un adevărat cult pentru Steinitz, două din cursurile sale având în titlu sublinierea ,,în axiomatizarea lui Steinitz", şi de asemenea, preţuieşte mult pe Eisenstein,[2] dar pentru fiecare din ei are o notă cu precizarea ,,matematician german, de origine evreiască" ([3], pag. 14, 227).

Aceste precizări, care astăzi ne şochează, erau făcute în 1945-1946. In 1950 Barbilian devine ... marxist ! El scrie ,,Noţiunea de grup reprezintă abstragerea câtorva proprietăţi fizice ale materiei, dintre care cea mai importantă este *proprietatea deplasărilor fără deformare*" [sublinierea DB], iar mai departe ,,Putem spune că teoria grupurilor ilustrează strălucit o a doua teză materialist-dialectică, în formularea celebră a lui Stalin, *teza conexiunii universale*" [sublinierea DB]. Această schimbare este, desigur, o manifestare de oportunism: câţiva ani mai târziu, Barbilian mărturisea că la începutul anilor '50 se temea să nu fie arestat din cauza trecutului său legionar.

In ceea ce priveşte evocările ample ale unor matematicieni iluştri, trebuie spus că ele sunt texte de o mare frumuseţe literară, în aşa măsură încât Dinu Pillat le-a introdus în ediţiile sale

Ion Barbu. *Pagini de proză.* Ed. pentru Literatură, Bucureşti 1968,

Ion Barbu. *Versuri şi proză.* BPT, Ed. Minerva, Bucureşti 1970.

Sunt incluse evocări ale lui Ion Banciu (profesorul elevului Barbilian: ,,rară, providenţială întâlnire!"), Gh. Ţiţeica (,,Bătălia se desfăşoară albă, hotărâtă, într-un mers de fapt suveran. Ochii profesorului, precişi, albaştri în planul median al amfiteatrului, par materializarea punctelor circulare de la infinit: organizatori şi absolvenţi. Pe când faţa se desface pe fondul negru al tablei ca masca însăşi a geometriei. Ca sfera absolută neeuclidiană."), Wilhelm Blaschke, David Hilbert, Carl Friederich Gauss (o analiză amplă a realizărilor lui Gauss, plecând cu ,,Inşirarea domeniilor pe care Gauss şi-a pus sigiliul arată că îmbrăţişarea minţii lui tindea la universalitate" şi culminând cu ,,Gauss a realizat printre matematicieni un ordin nou, oarecum transfinit de mărime. E net superior unei opere, ea însăşi supremă"), Evariste Galois (,,Teoria lui Galois se găseşte la autorul ei în stadiul heuristic, în care noile concepte trăiesc în promiscuitate cu subiectul cercetător, în care conceptele vegetează ca nişte organe, pe axa timpului"). In aceleaşi volume mai găsim Direcţii de cercetare în matematicile contemporane, Formaţia matematică, şi Aforisme[3] (printre care faimosul ,,Desenul corupe raţionamentul" şi ,,Nu există matematice vorbite (decât la examene[4] şi în congresele matematicienilor). Un adevăr matematic nu poate

[2]Dactilografa pare să fi fost o persoană cultă, dar neatentă: scrie peste tot *Einstein* în loc de *Eisenstein*; numele apare în curs corectat de Barbilian.

[3]Alese de Solomon Marcus (comunicare personală).

[4]Din păcate, în zilele noastre componenta orală a examenelor a dispărut aproape cu

fi primit ca achiziţionat decât dacă e prezentat scris şi dacă rezistă verificării oamenilor competenţi."

Alte citate vor fi date în paragraful următor, unde va fi şi profesiunea de credinţă a lui Dan Barbilian asupra relaţiei dintre matematică şi poezie.

2 Dan Barbilian, un perfecţionist

Profesorul Barbilian venea la curs cu lecţia scrisă pe foi, dar nu sub forma unor notiţe, ci redactată complet, ca şi cum ar fi fost gata de trimis la tipar. Dar foarte curând se îndepărta de textul de pe foi, explicându-ne de ce era nemulţumit de ceea ce abia scrisese cu o zi înainte ! Uneori nu reuşea să corecteze greşeala şi amâna rezolvarea pentru lecţia următoare. Cei mai mulţi dintre colegii mei erau nemulţumiţi de acest stil de predare care implica poticneli, încercări nereuşite, reveniri; dar eu am fost fascinat de faptul că un mare matematician gândea cu voce tare în faţa noastră şi am învăţat mult în acest fel (încă o ilustrare a tezei academicianului Solomon Marcus privind rolul constructiv al greşelilor). De altfel, cursul curăţat de impurităţi era de o claritate desăvârşită, după cum constatai când îţi reciteai notiţele în vederea examenului.

La câţiva ani după absolvirea facultăţii, am asistat la o şedinţă de comunicări ţinută la facultate, în care profesorul Barbilian, mărturisind că ,,odată cu vârsta, mă cuprinde demonul vanităţii", revendica prioritatea unei teoreme pe care un alt profesor tocmai o publicase. Barbilian recunoştea însă că teorema lui nu fusese propriu-zis publicată într-o revistă, ci doar într-un curs, deoarece ,,Nu publicăm tot ce găsim; la un ospăţ bogat mai cad firimituri, pe care alţii se grăbesc să le ridice". In urma acestui episod, timp de mai mulţi ani am crezut că Barbilian îşi împărţea rezultatele în două categorii: unele mai importante, pe care le publica în reviste, şi altele pe care le lăsa în cursurile litografiate. Dar în ultimii ani, şi în mod definitiv cu ocazia pregătirii acestui studiu, mi-am dat seama că era o părere complet greşită.

Pentru formarea unei imagini corecte a lui Dan Barbilian sunt esenţiale însemnările sale autobiografice din 1940 şi 1954, reproduse în [9], I, 9-63 şi respectiv [8], 497-501. In continuare selecţionez câteva fragmente semnificative.

După obţinerea licenţei, în 1921, comunică lui Ţiţeica o ,,*încercare* de mai mare *întindere*, asupra naturii căreia a putut să se înşele; [...] congruenţele, detaliile tehnice ale demonstraţiei îl *rătăcesc*". Ţiţeica crede că lucrarea era de teoria numerelor şi îi procură o mică bursă pentru a studia la Göttingen cu Landau. Bursa se termină repede şi nu este reînnoită, dar Barbilian rămâne în Germania ,,*pe socoteală proprie*". Totuşi este ,,*impermeabil* la teoria numerelor aşa cum o concepea Landau [...]; în faţa unui David Hilbert *scăpătat*, mă las cu totul în voia *demoniei literare*". Este însă fascinat de Göttingen, un ,,orăşel pentru totdeauna matematic, în care filiaţia cugetării nu are nevoie de o vehiculare tangibilă, ci se transferă imaterial." Se întoarce de la Göttingen în 1924 fără doctorat, pe care îl ia abia în 1929 sub conducerea lui Ţiţeica, cu o teză

desăvârşire.

asupra varietăţilor hipereliptice. In perioada 1927-1932 ,,legăturile ştiinţifice cu G. Ţiţeica sunt destul de strânse şi *îndur* în tot acest timp ascendentul netăgăduitei sale personalităţi. [...] Abia în 1933, când încep să *mă desfac* de această influenţă, încerc să realizez adevărata mea natură. [...] Ea urmează lichidării din 1930 a trecutului meu literar (1919-1930)." Barbilian a întreţinut relaţii strânse cu lumea matematică germană. El se declară, pe drept cuvânt, ,,un reprezentant al programului de la Erlangen", îndatorat şcolii germane de matematică.

In 1940 mai scrie: ,,Intre lucrările publicate socotesc şi acele părţi litografiate din cursurile de specializare, ţinute în ultimii ani cu studenţii anului IV şi purtând asupra cercetărilor proprii. [...] Exemple ilustre (Gauss, Riemann, Weierstrass) arată că o parte însemnată [...] din contribuţia ştiinţifică rămâne acunsă în caiete de cursuri şi în manuscrise. Redusă la scară, constatarea rămâne valabilă şi pentru cercetătorii mărunţi. Incât am crezut de cuviinţă [...] să dau şi analiza lucrărilor rămase în manuscris, dar care [...] au fost mai toate *împărtăşite* diverselor societăţi savante în: conferinţe, referate, comunicări. [...] Reactivat ca matematician după 10 ani de experienţe literare, am *încercat* în primul rând *nevoia* de a produce şi numai în al doilea rând de a publica."

Notele din 1940 se încheie cu un text care de fapt îl defineşte pe Dan Barbilian ca fiind inseparabil de Ion Barbu : ,,Cercetarea matematică majoră primeşte o organizare şi orientare învecinate cu aceea a funcţiunii poetice, care, apropiind prin metaforă elemente disjuncte, desfăşoară structura identică a universului sensibil. La fel, prin fundarea axiomatică sau grupal-teoretică, matematicile asimilează doctrinele diverse şi slujesc scopul ridicat de a instrui de unitatea universului moral al conceptelor. In acest chip ele încetează de a mai fi o laborioasă barbarie ci, participând la desăvârşirea figurii armonioase a lumii, devin umanismul cel nou."

In continuarea din 1954 a memoriului de activitate, introduce cursul [2] în lista lucrărilor originale şi semnalează mai multe teoreme pe care le consideră importante şi pe care le-a publicat în cursuri litografiate, alcătuind şi o listă cu 5 asemenea cursuri (printre care [6]).

Făcând bilanţul, Barbilian socoteşte că a sosit momentul pentru *scurgerea către reviste* a lucrărilor sale ([8], pag. 501). Din păcate, nu a realizat acest proect amplu: după 1954 a mai publicat, ca lucrări de cercetare în reviste, doar 6 lucrări, în Studii şi cercetări matematice. Ultimele două lucrări, apărute după moartea sa, sunt în colaborare cu Nicolae Radu (singurele lucrări în colaborare ale lui Barbilian).

După această incursiune în atelierul de creaţie al lui Barbilian, mă socotesc îndreptăţit să afirm că *pentru Dan Barbilian, cercetarea ştiinţifică este inseparabilă de activitatea didactică.*

Mai cred că, asociind cu afirmaţia privind caracterul scris al matematicii (cf. Aforisme), obţinem un silogism care explică pregătirea lecţiilor prin texte redactate complet. Paradoxul aparent al ,,trădării" acestor texte în ziua lecţiei îl explic prin spiritul lui Dan Barbilian–Ion Barbu, în permanentă mişcare în căutarea perfecţiunii, a absolutului.

Cititorul căruia cele de mai sus i-au stârnit interesul, va găsi o prezentare detaliată a lui Dan Barbilian făcută de un ilustru fost student al său, academicianul Solomon Marcus, împreună cu o exegeză de mare adâncime şi fineţe a raporturilor dintre opera matematicianului şi cea a poetului, în volumele

Solomon Marcus, *Din gândirea matematică româneasca*, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti 1975.

Solomon Marcus, *Intâlnirea extremelor*, Ed. Paralela 45, Bucureşti 2006.

3 Programul de la Erlangen

Ultimele două paragrafe, dezvăluind câte ceva din cursurile pe care le-am urmat, nu respectă cronologia acestor cursuri. Ca o continuare firească a celor precedente, prezint mai întâi cursul de geometrie, pentru care las cuvântul aproape în întregime lui Barbilian.

,,Euclid a propus un ideal de fundare axiomatică a geometriei. La o mai de aproape cercetare, acest ideal de rigoare este reductibil la următoarele cereri." Ele sunt în număr de patru:

,,I. *Lipsa de contrazicere, sau cererea consistenţei.*" Prin definiţie, înseamnă că nu există o pereche de consecinţe ale axiomelor care să fie de forma $A = B$ şi $A \neq B$. Explică tehnica demonstraţiei prin construirea unui model în cadrul unei alte discipline, presupuse a fi consistentă. Incheie aceste explicaţii cu următoarele precizări: ,,Până unde se poate merge cu această retrogradare? Până la producerea unui model aritmetic. Admitem că axiomele aritmeticii sunt lipsite de contrazicere. Lipsa de contrazicere a axiomelor aritmeticii priveşte logica matematică şi ea nu interesează aici. Menţionăm numai că problema complectitudinii axiomelor aritmeticii a fost rezolvată de K. Gödel (Monatsh. für Math. Phys. 37 (1930)). Lipsa de contrazicere a axiomelor aritmeticii numerabilului a fost dovedită de Gerhard Gentzen în Math. Annalen 112(1936)."

,,II. *Cererea complectitudinii sau categoricităţii.* Toate propoziţiile geometriei pot fi cunoscute, adică pot fi cunoscute ca adevărate sau false." Aici demonstrează echivalenţa cu formularea ,,Un sistem de axiome e complect când admite numai realizări (modele) isomorfe între ele." In continuare explică pe larg programul de la Erlangen al lui Felix Klein, subliniind că în afară de geometrie mai există şi alte discipline care se pot realiza ca teoria invarianţilor unui grup de transformări. Observaţia făcută de Barbilian, tradusă în limbaj contemporan, spune că o astfel de teorie este completă dacă şi numai dacă grupul de transformări este unic, abstracţie făcând de un isomorism.

,,III. *Cererea de independenţă (sau minimalitate)*" nu este formulată aşa cum suntem obişnuiţi. Barbilian spune doar că ,,Lăsarea la o parte a uneia din axiome distruge complectitudinea sistemului", iar ceva mai departe recunoaşte că ,,Cererea 3 o lăsăm deocamdată în umbră."

,,IV. *Cererea de inerenţă*" înseamnă că ,,E de dorit ca enunţul axiomelor să trezească în noi reprezentări simple, date imediate ale introspecţiei sau [ale] experienţei exterioare: unui număr întreg îi urmează altul, partea e mai mică decât întregul, două segmente egale cu al treilea sunt egale între ele."

Comentând aceste ,,cereri", Barbilian constă că primele două sunt de natură logică, a treia ,,este de natură stilistică, formală; priveşte redactarea geometriei şi se acoperă de acest deziderat: sistemul de axiome să nu fie pletoric, ci minimal", iar a patra ,,e de natură psihologică.". In mod normal, Barbilian acordă prioritate primelor două cerinţe faţă de ultimele două.

Concluzia este următoarea: ,,*vom spune că o doctrină matematică admite o fundare axiomatică dacă se lasă dedusă dintr-un sistem finit de axiome satisfăcând I şi II.*". Aşadar, prin doctrină matematică Barbilian înţelege un sistem axiomatic consistent satisfăcând proprietatea de completitudine.

Inchei acest paragraf trecând dincolo de amintirile cursului pe care l-am urmat. Declarându-se adept al programului de la Erlangen, Barbilian face un pas în plus: în loc să aibă în vedere doar grupurile de transformări, precum Klein, Barbilian lucrează cu un grup arbitrar. Realizarea majoră a lui Barbilian în această direcţie este încadrarea mecanicii în programul de la Erlangen [2]. Citez din paginile introductive:

,,*Intemeierea grupal-teoretică a mecanicei.*"

,,E vorba de o definiţie modernizată a acestor doctrine, precizată într-un punct esenţial asupra căruia Felix Klein nu s-a aplecat îndeajuns. [...] S-a recunoscut anume că legile mecanicei clasice pot fi concepute ca invarianţi diferenţiali ai transformărilor grupului cu 10 parametri al lui Galilei-Newton. N-am întâlnit nicăieri pusă şi rezolvată problema: în ce măsură grupul Galilei-Newton *imană* legilor mecanicei? Anume, nu am văzut demonstrată reciproca observaţiei de mai sus: *cel mai întins* grup de transformări care invariază legile mecanicei clasice e grupul lui Galilei-Newton. Numai atunci grupul poate fi declarat ca *fundamental* mecanicei.

4 Briciul lui Ockham

In acest paragraf îmi propun să subliniez o trăsăură importantă a stilului lui Barbilian de a face matematică şi să o ilustrez cu un exemplu din cursul de teoria numerelor pe care l-am urmat.

Este vorba de faptul că Barbilian obişnuia să descompună o teoremă importantă în mai multe propoziţii, introducând pe rând ipotezele teoremei principale, punând astfel în evidenţă rolul fiecărei ipoteze în teorema principală. De aici rezultă faptul că Barbilian nu folosea ipoteze mai puternice decât era necesar. Aceasta este o recomandare cunoscută sub numele de *briciul lui Ockham*, dar nu am intâlnit acest nume nicăieri în scrierile lui Barbilian.

Cursul de teoria numerelor pe care l-am urmat a început cu o teoremă afirmând existenţa şi unicitatea reprezentării elementelor unui monoid[5] ca produse de elemente ireductibile. Au urmat elemente de teoria idealelor în inele

[5]Barbilian nu folosea acest cuvânt, ci spunea semigrup cu element unitate.

necomutative. O problemă studiată în cazul inelelor comutative a fost detectarea inelelor cu ideal principal, adică în care orice ideal este ideal principal. A demonstrat că orice inel comutativ, cu element unitate, fără divizori ai lui zero şi în care are loc împărţirea cu rest, este inel cu ideal principal. Printre inelele de întregi pătratici $\mathbb{Z}[\theta]$, cu θ satisfăcând o ecuaţie $\theta^2 + a\theta + b = 0$, au fost găsite următoarele inele cu ideal principal: $\theta^2 + 1 = 0$ (inelul luiGauss), $\theta^2 + 2 = 0$, $\theta^2 - 2 = 0$, $\theta^2 + 3 = 0$, $\theta^2 + \theta + 1 = 0$, $\theta^2 + \theta - 1 = 0$, $\theta^2 + \theta + 2 = 0$, $\theta^2 + \theta + 3 = 0$, $\theta^2 + \theta - 3 = 0$. Aplicaţiile la teoria numerelor au inclus teorema mică a lui Fermat şi teorema de reciprocitate a resturilor pătratice.

Chiar din această enumerare succintă se poate observa că în timp ce cadrul general al cursului este teoria inelelor, prima teoremă se referă la monoizi. Motivul este că pentru descompunerea în factori ireductibili nu este nevoie de întreaga structură de inel. Dar în timp ce ,,briciul lui Ockham" este adoptat de mulţi matematicieni, Barbilian merge mai departe şi despică teorema în două propoziţii, una afirmând existenţa iar cealaltă unicitatea, şi având ipoteze diferite. Să îl urmărim pe Barbilian, în limbaj contemporan.

Fie $(S, \cdot, e)$ un monoid, nu neapărat comutativ. Un element $\varepsilon \in S$ se numeşte *inversabil* dacă există un element $\varepsilon^{-1} \in S$ astfel încât $\varepsilon\varepsilon^{-1} = \varepsilon^{-1}\varepsilon = e$, în care caz ε^{-1} se numeşte *inversul* lui ε şi este unic determinat de ε. Mulţimea E a elementelor inversabile este submonoid al lui S şi grup.

Fie $a = bc$; dacă $b \notin E$ spunem că b este *divizor stâng* al lui a, iar dacă $c \notin E$ spunem că c este *divizor drept* al lui a. Notăm aceste cazuri cu $b \mid_s a$, respectiv $c \mid_d a$. Un element a se numeşt *ireductibil* dacă $a \notin E$ şi $a = bc \Longrightarrow b \in E$ sau $c \in E$.

Introducem acum condiţia

1^0 *orice lanţ de divizori stângi şi orice lanţ de divizori drepţi este finit* (sau *se rupe în finit*, în terminologia lui Barbilian).

Un şir de divizori stângi (drepţi) este un şir $a_1, a_2, \ldots$ de elemente din S cu proprietatea că pentru orice termen a_i din şir, a_{i+1} este divizor stâng (drept) al lui a_i.

Are loc:

Propoziţia 1. *Dacă monoidul S satisface 1^0, atunci orice element $a \notin E$ se descompune în produs finit de elemente ireductibile.*

Pe monoidul S se introduce *relaţia de asociere* $\sim$, care satisface

$$a \sim b \Longleftrightarrow \exists\, \varepsilon \in E \;\; a = b\varepsilon \Longleftrightarrow \exists\, \varepsilon' \in E \;\; a = \varepsilon' b \;;$$

dacă $a \sim b$, spunem că a şi b sunt *asociaţi.* Această relaţie este o *congruenţă* a monoidului S, adică o relaţie de echivalenţă satisfăcând

$$a \sim b \Longrightarrow ac \sim bc \,\&\, ca \sim cb \,.$$

Un element p se numeşte *prim la stânga* dacă $p \notin E$ şi

$$pa = bc \Longrightarrow \exists\, b' \;\; b = pb' \text{ sau } \exists\, c' \;\; c = pc' \,.$$

Acum introducem condiţiile:

2^0 *subcomutativitate la stânga*: $\forall\, a\ Sa \subseteq aS$, adică $\forall\, b\ \exists\, c\ \ ba = ac$;
3^0 *ireductibil* $\Longrightarrow$ *prim la stânga* ;
4^0 *scurtare la stânga*, adică $ab = ac \Longrightarrow b = c$.

Lema A. *Dacă S satisface $2^0, 3^0, 4^0$, atunci oricare ar fi elementele ireductibile r,t, avem $rt \sim tr$.*

In sfârşit, se introduce condiţia

5^0 *subpermutatibilitate la stânga*: $\forall\, a\ Ea \subseteq aE$, adică $\forall\, \varepsilon \in E\ \exists \varepsilon' \in E\ \ \varepsilon a = a\varepsilon'$.

Propoziţia 2. *In ipotezele $2^0, 3^0, 4^0, 5^0$, dacă*

$$p_1 p_2 \dots p_h = q_1 q_2 \dots q_k \ , \tag{α}$$

unde p_i $(i = 1, \dots, h)$ şi q_j $(j = 1, \dots, k)$ sunt ireductibili, atunci $h = k$ şi există o permutare σ a numerelor $(1, \dots, h)$ astfel încât

$$p_i \sim q_{\sigma(i)}\ (i = 1, \dots, h) \ . \tag{β}$$

Din Propoziţiile 1 şi 2 rezultă

Teoremă. *Dacă S satisface condiţiile $1^0, 2^0, 3^0, 4^0, 5^0$, atunci orice element $a \notin E$ se scrie ca un produs finit de elemente ireductibile,*

$$a = p_1 p_2 \dots p_h \ ,$$

produsul fiind unic, abstracţie făcând de ordine şi de asocierea factorilor.

Pentru eventualii cititori interesaţi, în încheiere dau demonstraţiile acestor rezultate. Urmând chiar exemplul Profesorului Barbilian, care se detaşa de redactarea cu care venea la lecţie, am schimbat unele detalii ale demonstraţiilor originare.

Lema 1. *Dacă S satisface 1^0, atunci orice element $a \notin E$ are o descompunere de forma $a = bc$ cu c ireductibil.*

Demonstraţie. Dacă a este ireductibil, atunci concluzia se verifică cu $a = ea$.

Altfel, există $b_1 \notin E$ şi $c_1 \notin E$ cu $a = b_1 c_1$; deci $c_1 \mid_d a$. Dacă c_1 este ireductibil, concluzia se verifică.

Altfel, există $b_2 \notin E$ şi $c_2 \notin E$ cu $c_1 = b_2 c_2$. Atunci $c_2 \mid_d c_1$ şi $a = b_1 b_2 c_2$. Dacă c_2 este ireductibil, concluzia se verifică.

Altfel, procesul continuă şi se formează un lanţ de divizori drepţi $a, c_1, c_2, \dots$, care se rupe în finit. Obţinem o descompunere $a = b_1 b_2 \dots b_n c_n$ cu c_n ireductibil. $\square$

Demonstraţia Propoziţiei 1. Dacă a este ireductibil, concluzia se verifică cu $a = a$.

Altfel, aplicăm Lema 1 şi obţinem $a = b_1 c_1$ cu c_1 ireductibil; deci $b_1 \mid_s a$. Dacă b_1 este ireductibil, atunci concluzia se verifică.

Altfel, aplicăm Lema 1 şi obţinem $b_1 = b_2 c_2$ cu c_2 ireductibil. Atunci $b_2 \mid_s b_1$ şi $a = b_2 c_2 c_1$. Dacă b_2 este ireductibil, concluzia se verifică.

Altfel, procesul continuă şi se formează un lanţ de divizori stângi $a, b_1, b_2, \dots$, care se rupe în finit. Obţinem o descompunere $a = b_n c_n \dots c_2 c_1$ cu toţi factorii ireductibili. □

Demonstraţia Lemei A. Dacă $r \sim t$, atunci $rt \sim tt \sim tr$. Presupunem acum $r \not\sim t$.

Din 2^0 rezultă că exită q şi v astfel ca (1) $rt = tq$ şi (2) $tr = rv$. Conform cu 3^0, r este prim la stânga, deci din (1) rezultă $t = rt'$ sau $q = rq'$. Cum t este ireductibil şi $r \notin E$, prima alternativă implică $t' \in E$, deci $r \sim t$, contrar ipotezei. Rezultă $q = rq'$ şi introducând în (1) obţinem (3) $rt = trq'$. Mai rămâne să demonstrăm $q' \in E$.

Din (3) şi (2) obţinem $rt = rvq'$, de unde cu 4^0 rezultă $t = vq'$. Intrucât t este ireductibil, deducem $v \in E$ sau $q' \in E$. Mai rămâne să demonstrăm că $v \notin E$.

Intr-adevăr, presupunând $v \in E$, din (2) se obţine $r = trv^{-1}$, unde r este ireductibil iar $t \notin E$, deci $rv^{-1} \in E$, prin urmare $r = (rv^{-1})v \in E$.Contradicţie. □

Lema 2. *Dacă p este prim la stânga şi $p = bc$ cu b,c ireductibili, atunci $p \sim b$ sau $p \sim c$.*

Demonstraţie. Avem $b = pb'$ sau $c = pc'$. De exemplu în prima alternativă, cum $p \notin E$ rezultă $b' \in E$, deci $p \sim b$. □

Demonstraţia Propoziţiei 2. Elementele $p_1, \ldots, p_h$ sunt prime la stânga cf. 3^0; vom folosi Lema 2 extinsă la un număr oarecare de factori.

Există $\sigma(1) \in \{1, \ldots, k\}$ astfel încât $p_1 \sim q_{\sigma(1)}$, deci $q_{\sigma(1)} = \varepsilon_1 p_1$ cu $\varepsilon_1 \in E$. Conform Lemei A, avem $q_\ell q_{\sigma(1)} \sim q_{\sigma(1)} q_\ell$ pentru toţi q_ℓ. Cum $\sim$ este congruenţă, aplicând în mod repetat această permutabilitate, membrul drept Q din (α) satisface $Q \sim q_{\sigma(1)} Q'$, unde Q' este produsul celorlalţi factori din Q. Prin urmare $Q = q_{\sigma(1)} Q' \varepsilon$, cu $\varepsilon \in E$, şi relaţia (α) devine

$$p_1 \ldots p_h = \varepsilon_1 p_1 Q' \varepsilon = p_1 Q' \varepsilon'' \ ,$$

unde $\varepsilon'' \in E$ şi ultima egalitate s-a obţinut aplicând 5^0: este esenţial faptul că transformarea lui ε_1 în ε'' se face cu păstrarea apartenenţei la mulţimea E. Folosind 4^0, rezultă

$$p_2 \ldots p_h = Q' \varepsilon'' \ .$$

Procedeul continuă şi rezultă că factorii $p_2, \ldots, p_h$ sunt asociaţi cu factori $q_{\sigma(2)}, \ldots, q_{\sigma(h)}$, unde indicii $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(h)$ sunt distincţi. De aici rezultă $h \leq k$ şi schimbând rolurile se obţine $k \leq h$. Prin urmare $h = k$, σ este o permutare şi are loc relaţia (β). □

5 Concluzii

Opera matematică a lui Dan Barbilian poartă pecetea Ion Barbu, fiind vorba nu doar de limbajul pitoresc, ci mai ales de gândirea care merge la esenţe.

Creaţia lui Dan Barbillian este structurată în teoreme ,,moleculare" care se descompun în teoreme ,,atomice"; acestea din urmă dezvăluie ce se poate obţine cu ipotezele teoremei ,,moleculare" luate separat.

La Dan Barbilian cercetarea ştiinţifică şi activitatea didactică merg mână în mână.

Studiul de faţă lasă deschisă problema unei analize punctuale a contribuţiilor lui Dan Barbilian în geometrie şi algebră, precum şi a ecoului operei sale. Constatăm că Barbilian a avut foarte puţini elevi în sensul acreditat al acestui cuvânt. Un elev mai mult potenţial nu s-a confirmat ca atare, altul şi-a schimbat orientarea matematică după ce obţinuse câteva rezultate apreciate de maestru; doar Mihail Benado a fost un elev consecvent şi care s-a afirmat el însuşi ca matematician de mare valoare. Dar influenţa lui Dan Barbilian asupra unora dintre noi este covârşitoare.

Mulţumiri

Observaţiile şi sugestiile pertinente făcute de academicianul Solomon Marcus şi de Dragoş Vaida au contribuit mult la îmbunătăţirea acestei lucrări. De asemenea, Claudia Mureşan a corectat o greşeală.

Lucrări consultate

In vremea studenţiei mele şi mai înainte, profesorii îşi redactau cursurile, care apăreau în fascicole litografiate şi puteau fi cumpărate (se vindeau în cămăruţa care este acum biroul administratorului). Aşa au procedat Simion Stoilow, Victor Vâlcovici, Miron Nicolescu, Dan Barbilian, Alexandru Froda şi desigur alţii, pe care nu-i mai reţin.

Am fost foarte bucuros când cineva drag mi-a legat cursurile lui Barbilian în volume cartonate frumos. Iată lista lor.

[1] *Introducere la cursul de axiomatica mecaniei clasice* („Lecţie de deschidere, ţinută Luni 8 Februarie 1942, în formă dezvoltată") ; 32 pag.

[2] *Axiomatica mecanicei clasice*; 599 pag., 1943-1944.

[3] *Curs de algebră axiomatică. Teoria lui Galois în axiomatizarea lui Steinitz*; 256 pag., 1945-1946.

[4] *Curs de algebră axiomatică. Partea* [a] *II-a, Inele şi ideale*; 286 pag., 1945.

[5] *Grupuri cu operatori* („Fasc. suplimentară la cursul de Algebră Axiomatică", dar sunt mai multe fascicole) ; 141 pag., nedatat.

[6] *Curs de teoria grupurilor şi* [a] *structurilor*; 453 pag., 1950-1951.

[7] *Curs de teoria numerelor* (Lecţii culese de Alexandru Solian; copertă tipărită) ; 267 pag., 1955.

Volumul tipărit

[8] *Algebră.* Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1985,

este îngrijit de Horia Pop şi reproduce unele cursuri, printre care [7], precum şi „Continuarea notei asupra lucrărilor ştiinţifice" şi „Indrumar metodic al cursului de geometrie".

Am mai consultat

[9] *Opera Matematică.* I. *Geometrie.* II. *Algebră.* Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1967.